Lineaire algebra I (wiskundigen)

Toets, donderdag 22 oktober, 2015

(1) Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak

$$V = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x - 3y + z = 2 \,\}.$$

Bepaal de afstand van het punt $q = (-4, 3, 4) \in \mathbb{R}^3$ tot het vlak V.

(2) Zij $a \in \mathbb{R}^3$ de vector $a = (1, 2, -2)$ en definieer het vlak $V = a^\perp$. Zij $s\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de spiegeling in V. Je mag gebruiken dat s een lineaire afbeelding is. Geef een matrix A zodanig dat voor alle $v \in \mathbb{R}^3$ geldt $s(v) = A \cdot v$. Geef ook uitleg!

(3) Zij V een vectorruimte over $\mathbb{R}$ met twee lineaire deelruimtes U_1 en U_2. Bewijs dat de doorsnede $U_1 \cap U_2$ weer een deelruimte is.

(4) Zij W een vectorruimte over $\mathbb{R}$ en $t\colon W \to W$ een lineaire afbeelding waarvoor geldt $t \circ t = t$. Definieer

$$U = \operatorname{im}(t) \qquad \text{en} \qquad V = \ker(t).$$

(i) Laat zien dat er geldt

$$\operatorname{im}(\mathrm{id}_W - t) \subset V.$$

(ii) Laat zien dat U en V complementaire ruimtes zijn in W.