Tentamen - Analyse II - Wiskunde

Woensdag 8 juli 2015 - zaal 312 Snellius - 14.00-17.00

- Vermeld op ieder vel **duidelijk leesbaar** niet alleen uw naam (met voornaam en alle voorletters), maar ook uw studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Gebruik van een **niet-grafische** rekenmachine is toegestaan.

Dit tentamen bestaat uit *vier* opgaven. Vergeet de achterkant niet.

Opgave 1 Beschouw het volume

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - 3x^2 - y^2 \text{ en } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0\}$$

samen met het oppervlak

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 \text{ en } (x, y, z) \in \mathcal{V}\},$$

georienteerd naar boven toe. Het oppervlak $\mathcal{S}$ verdeelt $\mathcal{V}$ in twee stukken; schrijf $\mathcal{V}_b$ voor het bovenste stuk (dat het punt $(0, 0, 1)$ bevat). Gegeven is ook het vectorveld

$$\vec{F}(x, y, z) = \Big(x, y + x^2, 2z + xy\Big).$$

(a) Bereken de flux van $\vec{F}$ door $\mathcal{S}$, ofwel de vector-oppervlakte-integraal

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

door gebruik te maken van een directe berekening.

(b) Bereken nogmaals de flux van $\vec{F}$ door $\mathcal{S}$, maar pas nu de divergentie stelling toe op $\mathcal{V}_b$.

Opgave 2 Beschouw het volume

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \text{ en } y \geq 0 \text{ en } z \leq 4 \text{ en } x^2 + y^2 \leq z \leq 2x + 2y\}$$

samen met de doorsnijdingen

$$\mathcal{D}_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in \mathcal{V}\}.$$

(a) Bereken het volume van $\mathcal{V}$.

(b) Bereken de oppervlakte-integraal

$$\iint_{\mathcal{D}_2} f \, dA,$$

waarbij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-2}$.

Opgave 3 Beschouw de scalaire functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) = (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - 2)$$

en het gebied

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(a) Bepaal de kritieke punten van $f(x, y)$ op $\mathbb{R}^2$ en klassificeer deze (minimum/maximum/zadelpunt).

(b) Vind (en klassificeer) alle lokale/globale maxima/minima van $f(x, y)$ beperkt tot de rand $\partial\mathcal{D}$.

(c) Vind (en klassificeer) alle lokale/globale maxima/minima van $f(x, y)$ op $\mathcal{D}$.

Opgave 4 Gegeven is het vectorveld

$$\vec{F}(x, y, z) = \big(- 2xz, 0, y^2 \big).$$

Beschouw een gesloten C^1-gladde kromme $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ zonder zelfdoorsnijdingen die geheel op de bolschil $x^2+y^2+z^2 = 1$ ligt. Laat zien dat de vector-lijnintegraal van $\vec{F}$ langs $\mathcal{C}$ verdwijnt, ofwel

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{R} = 0.$$

Tip: kijk naar de rotatie van $\vec{F}$.