Tentamen Projectieve Meetkunde

27 juni 2014

14.00 - 17.00 uur

Opgave 1

We voorzien de reële projectieve ruimte $\mathbb{P}^3$ van homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$.

a) (2p) Bereken de homogene coördinaten van het snijpunt van de lijn door de punten $p = (1 : 0 : 1 : 0)$ en $q = (2 : -1 : 1 : 3)$ met het vlak gegeven door de vergelijking $x_0 = x_3$.

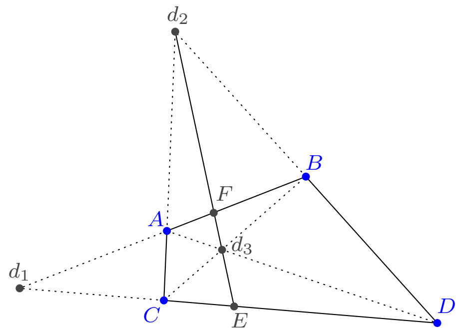
b) (2p) Stel de vergelijking op van het vlak door de punten $a = (1 : 0 : 0 : 0)$, $b = (0 : 0 : 1 : 0)$ en $c = (1 : 0 : 1 : 1)$.

c) (1p) Formuleer de duale van de Stelling van Pappos.

Opgave 3

Beschouw de volledige vierhoek $ABCD$ met de diagonaalpunten d_1, d_2 en d_3:

$$d_1 := \overline{AB} \cap \overline{CD}, d_2 := \overline{AC} \cap \overline{BD} \textit{ en } d_3 := \overline{AD} \cap \overline{BC}.$$



a) (2p) Bewijs dat geldt: $(d_1, C, E, D) = (d_1, B, F, A)$.

b) (2p) Bewijs dat $\{d_1, E\}$ harmonisch wordt gescheiden door $\{C, D\}$.

Opgave 2

Laat V en W twee verschillende vlakken zijn in een 3-dimensionale projectieve ruimte en $f : V \to W$ een projectieve afbeelding die de snijlijn van V en W puntsgewijs invariant laat.

a) (2p) Zijn $p, q \in V$ twee verschillende punten niet op W. Laat zien dat geldt:

$$\overline{pq} \ \cap \ \overline{f(p)f(q)} \neq \emptyset.$$

b) (2p) Bewijs dat f een projectie vanuit een punt is.

Opgave 4

We beschouwen we $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ met standaard homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$.

a) (2p) Bepaal een parametervoorstelling van de kegelsnede in $\mathbb{P}^2$ met vergelijking

$$x_0^2 + 2x_0x_1 - 2x_1x_2 = 0 \ .$$

b) (2p) Bepaal een vergelijking van de kegelsnede met parametervoorstelling

$$(\lambda\mu - \lambda^2 - \mu^2 : \lambda^2 + \mu^2 : \lambda^2 - \mu^2) \ .$$

Opgave 5

We beschouwen we $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ met standaard homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$.

a) (2p) Laat zien dat de kegelsneden in $\mathbb{P}^2$ die door de punten $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ en $(1 : 1 : 1)$ gaan een door $\mathbb{P}^1$ geparametriserde familie $\{K_{(a:b)} : (a : b) \in \mathbb{P}^1\}$ vormen, en bepaal voor elke $(a : b) \in \mathbb{P}^1$ de rang van $K_{(a:b)}$.

b) (2p) Beschouw de lijn met vergelijking $x_2 = 0$ als de oneindig verre. Wat is dan het type (ellips, hyperbool etc.) van het affiene deel van $K_{(a:b)}$ afhankelijk van $(a : b)$?

Opgave 6 (3p)

Laat V een 4-dimensionale complexe vectorruimte zijn. We beschouwen de Grassmann-variëteit $\mathcal{G}$ van lijnen in de 3-dimensionale projectieve ruimte $\mathbb{P}(V)$ via de Plücker-inbedding als gladde kwadriek in de 5-dimensionale projectieve ruimte $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.
Laat $\mathcal{V}$ een 3-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ zijn zodat de kwadriek $\mathcal{X} := \mathcal{V} \cap \mathcal{G}$ in $\mathcal{V}$ rang 3 heeft. Op college hebben we geleerd:

1. Er is een $L \in \mathcal{V}$ en een 2-dimensionale lineaire deelruimte $\mathcal{H} \subset \mathcal{V}$ met $L \notin \mathcal{H}$ zodat $\mathcal{K} := \mathcal{H} \cap \mathcal{X}$ een gladde kegelsnede in $\mathcal{H}$ is en $\mathcal{X}$ de kegel over $\mathcal{K}$ met top L.

2. Er is een gladde kwadriek $Q \subset \mathbb{P}(V)$ zodat $L \subset Q$ en $\mathcal{K}$ het regelsysteem van Q is waar L niet bij hoort.

Laat $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ een lijn zijn die in de kegel $\mathcal{X}$ bevat is. Beschrijf de met $\mathcal{M}$ corresponderende lijnenconfiguratie in $\mathbb{P}(V)$ in termen van L en Q.