

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Hertentamen Algebra 2

10 maart 2016, 14:00–17:00

Motiveer steeds je antwoord en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag boeken, dictaten en aantekeningen gebruiken, maar geen rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen. Opgaven uit het dictaat mag je niet zonder bewijs gebruiken.

1. Ontbind de volgende ring-elementen in irreducibele elementen:

- (a) $15 - 15i$ in $\mathbb{Z}[i]$;
- (b) $X^3 + 5X + 5$ in $\mathbb{Q}[X]$;
- (c) $X^3 + X + 1$ in $\mathbb{F}_3[X]$.

2. (a) Laat $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de drie complexe nulpunten van het polynoom

$$X^3 - 5X + 1$$

zijn. Bereken $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$.

(b) Bereken de discriminant van het polynoom $(X^2 + X + 3)^2 \in \mathbb{Q}[X]$.

3. Zij $R = \mathbb{Q}[[X]]$ de ring van machtreeksen over \mathbb{Q} . Laat zien dat:

- (a) $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R$ inverteerbaar is dan en slechts dan als $a_0 \neq 0$;
- (b) ieder element in R te schrijven is als $X^r u$ met $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en u een eenheid in R ;
- (c) ieder ideaal van R voortgebracht wordt door een macht van X .

4. Zij R een commutatieve ring. Een R -moduul M heet *simpel* als het precies twee deelmodulen heeft, 0 en M . Een moduul heet *semisimpel* als het de directe som van simpele modulen is.

- (a) Laat zien dat het moduul $\mathbb{C}[X]/(X - \alpha)^i$ simpel is dan en slechts dan als $i = 1$.
- (b) Zij V een vectorruimte over \mathbb{C} en $\phi: V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding. Vat V op als $\mathbb{C}[X]$ -moduul door X als ϕ te laten werken. Laat zien dat V semisimpel is als $\mathbb{C}[X]$ -moduul dan en slechts dan als ϕ diagonaliseerbaar is.

5. Geef een voorbeeld (met bewijs) van:

- (a) een torsiemoduul over \mathbb{Z} waarvan de annihilator nul is;
- (b) een ring met precies drie idealen;
- (c) en $\mathbb{R}[X]$ -moduul dat niet eindig voortgebracht is als \mathbb{R} -moduul.