Herkansing Lineaire Algebra I (wiskunde)

Bas Edixhoven

13 maart 2017, 14:00–17:00

Geen rekenmachines, dictaat en aantekeningen. **Motiveer elk antwoord.**
Controleer zoveel mogelijk je antwoorden.
Er zijn **6 opgaven**. Indicatieve normering: 15+15+15+15+15+15 =90. Succes!

1. Laat $a = (1, 2, -2)$ en $v = (3, 2, -1)$ in $\mathbb{R}^3$. Laat $s := s_{a^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de spiegeling in het vlak $a^\perp$ zijn.

   (a) Bepaal $s(v)$.

   (b) Geef de matrix $[s]_{E_3}^{E_3}$ van s ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$.

   (c) Geef de eigenwaarden van s, en van elke eigenruimte een basis (hint: ga niet zomaar rekenen, maar denk eerst na).

2. Laat $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$.

   (a) Bepaal de gereduceerde rijtrapvorm van A.

   (b) Geef een basis van $\ker(A)$.

3. Laat $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 8 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$.

   (a) Bepaal de eigenwaarden van A en voor iedere eigenwaarde een basis van de eigenruimte.

   (b) Geef een diagonale matrix D en een inverteerbare matrix P, beide in $\mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, zodat $A = PDP^{-1}$.

4. Laat, voor $a \in \mathbb{R}$, $A_a = \begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$, en laat $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$. Bepaal voor elke $a \in \mathbb{R}$ de verzameling $\{x \in \mathbb{R}^2 : A_a{\cdot}x = b\}$.

5. Laat $C = (w_1, w_2, w_3)$ de basis zijn van $\mathbb{R}^3$ met $w_1 = (0, -2, -4)$, $w_2 = (-1, -1, -1)$ en $w_3 = (1, 0, 0)$. Laat $B = (v_1, v_2)$ de basis van $\mathbb{R}^2$ zijn met $v_1 = (1, -2)$ en $v_2 = (1, -1)$. Je hoeft niet te controleren dat C en B bases zijn. Laat $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding zijn met

$$[f]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Geef de formule voor $[f]_{E_3}^{E_2}$ in termen van $[f]_C^B$ en de basisveranderingsmatrices.

   (b) Bepaal $[f]_{E_3}^{E_2}$.

6. WAAR of ONWAAR? Geef een korte uitleg als je voor WAAR kiest, en een tegenvoorbeeld als je voor ONWAAR kiest. Vergeet niet eerst duidelijk je keuze te vermelden. Je mag stellingen uit het dictaat gebruiken. Als je een tegenvoorbeeld geeft, dan moet je alle objecten daarin expliciet definiëren (het lichaam, de vectorruimte, de vectoren,...), én een argument geven waarom het een tegenvoorbeeld is.

   (a) Als V een eindig-dimensionale vectorruimte is, en U en W zijn deelruimten van V met $U + W = V$, en $B = (v_1, \ldots, v_d)$ is een basis van U en $C = (w_1, \ldots, w_e)$ is een basis van W, dan is $(v_1, \ldots, v_d, w_1, \ldots, w_e)$ een basis van V.

   (b) Als $n \in \mathbb{N}$, en V een vectorruimte is met $\dim(V) = n$, en U_1, U_2 en U_3 zijn deelruimten, en $d_i = \dim(U_i)$, dan geldt $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) \geq d_1 + d_2 + d_3 - 2n$.

   (c) Als V en W eindig-dimensionale vectorruimten zijn, en $U \subseteq V$ is een deelruimte van V, en $f\colon U \to W$ is een lineaire afbeelding, dan is er een lineaire afbeelding $g\colon V \to W$ zodat f de beperking is van g tot U.

   (d) Laat $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Laat V en W vectorruimten van dimensie n zijn, $f\colon V \to W$ lineair, B een basis van V en C een basis van W. Dan is $\det([f]_C^B)$ onafhankelijk van de keuzes van B en C.

   (e) Voor alle $n \in \mathbb{N}$ zijn alle $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ diagonaliseerbaar.