Lineaire algebra I (wiskundigen)

Hertentamen, maandag 9 maart, 2015

Geen rekenmachines, telefoons, dictaat of aantekeningen. **Motiveer elk antwoord!**

Opgave 1 (9 punten). Voor alle reële getallen $c \in \mathbb{R}$ definiëren we de matrix A_c als

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & 1-c & 2 \\ c & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

en we definiëren de afbeelding $f_c \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ door

$$f_c(x) = A_c \cdot x$$

voor alle $x \in \mathbb{R}^3$.

(a) Voor welke $c \in \mathbb{R}$ is f_c injectief?
(b) Is A_c inverteerbaar voor $c = 0$? Zo nee, geef aan waarom niet; zo ja, geef de inverse.

Opgave 2 (9 punten). Zij B de matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal alle eigenwaarden van B en bepaal voor elke eigenwaarde een basis voor de bijbehorende eigenruimte.
(b) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix Q zodanig dat geldt

$$D = Q^{-1}BQ.$$

(c) Bereken B^{2015}. In je antwoord mag je uitdrukkingen zoals 17^{2015} laten staan.

Opgave 3 (7 punten). Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak door de oorsprong met normaal $a = (1, 2, -1)$. Zij $W \subset \mathbb{R}^3$ het vlak voortgebracht door $v = (1, 0, -1)$ en $w = (2, 1, 1)$. Geef een basis voor de lineaire deelruimte $(V \cap W)^\perp$ van $\mathbb{R}^3$. Bewijs ook dat dit inderdaad een basis is!

Op de volgende pagina staan nog meer opgaven

Opgave 4 (13 punten). Zij $V = \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ de vectorruimte van alle reële 4×4 matrices met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging. Zij

$$\begin{aligned} t \colon V &\to V \\ M &\mapsto M^\top \end{aligned}$$

de lineaire afbeelding die een matrix M stuurt naar zijn getransponeerde, dus als

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix},$$

dan geldt

$$t(M) = M^\top = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix}.$$

(i) Laat zien dat er geldt $t^2 = \mathrm{id}_V$.
(ii) Wat is de rang van t?
(iii) Bewijs dat de 1 en -1 de enige eigenwaarden van t zijn.
(iv) Wat zijn de dimensies van de eigenruimtes $E_1(t)$ en $E_{-1}(t)$?
(v) Is t diagonaliseerbaar?

We noemen een matrix M symmetrisch als er geldt $M^\top = M$ en antisymmetrisch als $M^\top = -M$.

(vi) Bewijs dat elke matrix $M \in V$ te schrijven is als de som van een symmetrische en een antisymmetrische matrix.

Opgave 5 (7 punten). Stel V is een eindig-dimensionale reële vectorruimte en $f \colon V \to V$ een lineaire afbeelding. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn.

(i) De rang van f is gelijk aan de rang van de afbeelding $f^2 = f \circ f$.
(ii) Er geldt $\operatorname{im} f \cap \ker f = \{0\}$.