Hertentamen Algebra 3
5 juli 2017, 10:00 – 13:00
zaal 412

Dit is een open-boektentamen, maar je mag niet zonder uitleg naar opgaven verwijzen. Bewijs je antwoorden en leg uit hoe je eraan komt, inclusief de gebruikte berekeningen. Elektronische hulpmiddelen, inclusief rekenmachines en telefoons, zijn niet toegestaan. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat. De verhouding van de punten voor de vijf opgaven is 3 : 6 : 4 : 4 : 3.

Opgave 1. Geef van elk van de volgende lichaamsuitbreidingen aan of ze normaal zijn en of ze separabel zijn.

(a) $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\sqrt[3]{7})$
(b) $\mathbf{F}_2(t^3) \subset \mathbf{F}_2(t)$
(c) $\mathbf{F}_3(t^3) \subset \mathbf{F}_3(t)$

Opgave 2. Zij $L = \mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{5}, \sqrt{7})$.

(a) Laat zien dat $[L : \mathbf{Q}] = 8$. (Hint: je mag gebruiken dat voor twee verschillende priemen p en q geldt $[\mathbf{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbf{Q}] = 4$.)
(b) Laat zien dat $L/\mathbf{Q}$ Galois is en geef een polynoom $f \in \mathbf{Q}[x]$ zodanig dat L een ontbindingslichaam is voor f over $\mathbf{Q}$.
(c) Geef voor elk automorfisme $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ de bijbehorende permutatie van de nulpunten van f.
(d) Welke ondergroep van $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ correspondeert met het tussenlichaam $\mathbf{Q}(\sqrt{-105})$?
(e) Heeft de uitbreiding $L/\mathbf{Q}$ tussenlichamen die niet normaal zijn?
(f) Laat zien dat $\beta = \sqrt{-3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ een primitief element is, dat wil zeggen, dat $\mathbf{Q}(\beta) = L$.

Opgave 3. Zij $\overline{\mathbf{F}}_2$ een algebraïsche afsluiting van $\mathbf{F}_2$ en $\alpha \in \overline{\mathbf{F}}_2$ een nulpunt van het polynoom $g = x^4 + x + 1 \in \mathbf{F}_2[x]$. Beschouw de uitbreiding $K = \mathbf{F}_2(\alpha)$.

(a) Wat is de karakteristiek van K?
(b) Laat zien dat $[K : \mathbf{F}_2] = 4$.
(c) Hoeveel elementen heeft K?
(d) Geef alle tussenlichamen van de uitbreiding $K/\mathbf{F}_2$.
(e) Geef een basis voor K over $\mathbf{F}_2$ en geef de coëfficiënten van α^6 ten opzichte van deze basis.

Op de achterkant van dit blad staan nog twee opgaven.

Opgave 4. Zij $\zeta = e^{2\pi i/13}$ en $F = \mathbf{Q}(\zeta) \subset \mathbf{C}$. Zij $V \subset F$ de verzameling van alle elementen van F die construeerbaar zijn uit de punten 0 en 1.

(a) Bewijs dat V een lichaam is.
(b) Wat is de graad $[V : \mathbf{Q}]$?
(c) Geef een voortbrenger γ voor V over $\mathbf{Q}$, dat wil zeggen, een element $\gamma \in F$ zodanig dat $V = \mathbf{Q}(\gamma)$.

Opgave 5. Zij $r, n \geq 1$ geheel en zodanig dat $p = rn + 1$ een priemgetal is. Laat zien dat er een Galois uitbreiding $K/\mathbf{Q}$ bestaat waarvoor de Galoisgroep $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ cyclisch van orde n is.