HERTENTAMEN TOPOLOGIE
29 JANUARI 2024, 9:00-12:00

- Vermeld naam en studentnummer op elk vel. Schrijf duidelijk en motiveer je antwoorden.
- Je mag de resultaten uit voorafgaande deelvragen gebruiken ook als je ze niet bewezen hebt.

Succes!

Opgave 1 [6+3 pt]

Beschouw de volgende deelruimten van $\mathbb{R}^2$ (met Euclidische topologie):

$$K = \{(x,y) \,:\, x^2 - y^2 \leq 0\}; \quad H = \{(x,y) \,:\, x^2 - y^2 \geq 1\};$$
$$B = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ en } y \leq 0\} \cup \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 = 1 \text{ en } y \geq 0\}.$$

(a) Ga na of deze ruimten wegsamenhangend, dan wel compact zijn.
(b) Zijn K en H homeomorf? Zijn K en B homeomorf? Zijn H en B homeomorf?

(*Geef een kort bewijs voor je antwoorden!*)

Opgave 2 [4+3 pt]

Een afbeelding $f : X \to Y$ heet een *lokaal homeomorfisme* als er voor alle $x \in X$ open deelverzamelingen $U \subseteq X$ en $V \subseteq Y$ bestaan z.d. $x \in U$ en $f|_U : U \to V$ een homeomorfisme is. Merk op dat een lokaal homeomorfisme een continue afbeelding is (dit hoef je niet te bewijzen).

(a) Bewijs dat ieder lokaal homeomorfisme een open afbeelding is.
(b) Zij $f : X \to Y$ een lokaal homeomorfisme en neem aan dat X lokaal compact is. Laat zien dat $f(X)$ ook lokaal compact is.

Opgave 3 [6 pt]

Bewijs dat de sfeer

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

homeomorf is met de quotiëntruimte als volgt gedefinieerd:

$$X = (D_- \sqcup D_+)/\sim,$$

waarbij $D_- = \{(x,y,-1) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$, $D_+ = \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ en $(x,y,z) \sim (x',y',z')$ dan en slechts dan als:

(i) $(x,y,z) = (x',y',z')$ of
(ii) $(x,y) = (x',y')$ en $x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2 = 1$.

z.o.z.

Opgave 4 [4 pt]

Zij $p : E \to B$ een overdekkingsafbeelding en neem aan dat B een Hausdorff-ruimte is. Laat zien dat E ook een Hausdorff-ruimte is.

Opgave 5 [3+4 pt]

(a) Zijn $f_0, f_1 : X \to Y$ homotope continue afbeeldingen. Bewijs dat er voor elke $x \in X$ een pad in Y bestaat van $f_0(x)$ naar $f_1(x)$.

(b) Neem aan dat $g : X \to Y$ en $h : Y \to X$ continue afbeeldingen zijn z.d. $h \circ g$ homotoop is met de identiteitsafbeelding van X en dat Y wegsamenhangend is. Bewijs dat X wegsamenhangend is.

Opgave 6 [3+4 pt]

(a) Beschouw een deelverzameling A van $\mathbb{R}^n$ en een punt $x_0 \in A$. Zij Y een topologische ruimte, $y_0 \in Y$ en $h : A \to Y$ een functie met $h(x_0) = y_0$. Neem aan dat er een continue functie $H : \mathbb{R}^n \to Y$ bestaat zo dat $H(x) = h(x)$ voor alle $x \in A$. Bewijs dat het geïnduceerde homomorfisme van fundamentaalgroepen

$$h_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

triviaal is.

(b) Laat zien dat de afbeelding

$$h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to S^1, \quad h(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

geen continue uitbreiding naar $\mathbb{R}^2$ heeft.

Opgave 7 [5 pt]

Zij X een wegsamenhangende topologische ruimte en zijn $x_0, x_1 \in X$. Een pad α in X met $\alpha(0) = x_0$ en $\alpha(1) = x_1$ induceert een isomorfisme van groepen

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \quad [\gamma] \mapsto [\overline{\alpha} * \gamma * \alpha]$$

(dit hoef je niet te bewijzen). Neem aan dat voor elke twee paden α en β van x_0 naar x_1 de geïnduceerde homomorfismen $\hat{\alpha}$ en $\hat{\beta}$ gelijk zijn. Bewijs dat $\pi_1(X, x_0)$ abels is, d.w.z., voor elke twee lussen γ en δ met basispunt in x_0 geldt: $[\gamma] * [\delta] = [\delta] * [\gamma]$.

Normering: het cijfer is gelijk aan $1 + \frac{\#\text{punten}}{5}$.