TENTAMEN TOPOLOGIE
10 JANUARI 2024, 9:00-12:00

Vermeld naam en studentnummer op elk vel. Schrijf duidelijk en motiveer je antwoorden. Succes!

Opgave 1 [8 pt]

Beschouw de volgende deelruimten van $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$ (met Euclidische topologie):

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}; \qquad P = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\};$$
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

(a) Ga na of deze ruimten gesloten (in $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$), dan wel compact zijn.
(b) Bepaal welke van deze ruimten homeomorf zijn.

(*Bewijs je antwoorden!*)

Opgave 2 [8 pt]

Zij $\mathbb{N}$ de verzameling van positieve gehele getallen (met de discrete topologie).

(a) Bewijs dat $\mathbb{N}$ een lokaal compacte maar niet-compacte Hausdorff-ruimte is.
(b) Bewijs dat de eenpuntscompactificatie van $\mathbb{N}$ homeomorf is met $\{0\} \cup \{1/n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ (als deelruimte van $\mathbb{R}$).

Opgave 3 [4 pt]

Zij $q : X \to Y$ een quotiëntafbeelding. Neem aan dat alle samenhangscomponenten van X open zijn. Laat zien dat de samenhangscomponenten van Y ook open zijn.

Opgave 4 [6 pt]

Zij X een topologische ruimte. De *suspensie* van X is de quotiëntruimte

$$S(X) = X \times [-1,1]/\sim$$

waarbij $(x,t) \sim (x',t')$ dan en slechts dan als

$$(x,t) = (x',t') \quad \text{of} \quad (x,t),(x',t') \in X \times \{-1\} \quad \text{of} \quad (x,t),(x',t') \in X \times \{1\}.$$

Bewijs dat $S(S^1)$ homeomorf is met S^2.

z.o.z.

Opgave 5 [10 pt]

(a) De n-sfeer S^n is gegeven door

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Zij X een topologische ruimte, en zijn $f, g : X \to S^n$ twee continue afbeeldingen z.d. $f(x) \neq -g(x)$ voor alle $x \in X$. Laat zien dat f en g homotoop zijn.

(b) Bewijs dat de antipodale afbeelding

$$a : S^1 \to S^1, \quad a(x) = -x$$

homotoop is met de identiteitsafbeelding.

(c) Zijn $f, g : S^1 \to S^1$ twee continue afbeeldingen z.d. $f(x) \neq g(x)$ voor alle $x \in S^1$. Bewijs dat f en g homotoop zijn.

Opgave 6 [4 pt]

Zij $p : E \to B$ een overdekkingsafbeelding. Bewijs dat voor alle $b \in B$ de vezel $p^{-1}(\{b\})$ (als deelruimte van E) de discrete topologie heeft.

Opgave 7 [10 pt]

(a) Voor een deelverzameling $A \subseteq X$ laat $i\colon A \hookrightarrow X$ de inclusie-afbeelding zijn. Bewijs dat als A een retract van X is, het geïnduceerde homomorfisme $i_*\colon \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ injectief is voor alle $a_0 \in A$.

(b) Laat zien dat S^1 geen retract is van de gesloten eenheidsschijf $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(c) Zij $x_0 \in S^1$: bestaat er een retractie van de torus $T^2 = S^1 \times S^1$ op $S^1 \times \{x_0\}$? En een deformatie-retractie?

Normering: het cijfer is gelijk aan $1 + \#\text{punten} \cdot \frac{9}{50}$.