Algebra 1 hertentamen

25 juni 2024

Je mag het dictaat gebruiken, maar geen rekenmachines of andere electronische hulpmiddelen. Opgaven 2.46 en 2.49 mogen zonder bewijs gebruikt worden, de andere opgaven niet. **Motiveer steeds je antwoord en noem de stellingen die je gebruikt.** Succes!

1. [**5 punten**] Definieer de permutaties α en β in S_9 door

$$\alpha = (168735)(3415)(34) \quad \text{en} \quad \beta = (263987)(25)(45)$$

(a) Bereken de orde van α en β.

(b) Voor welke waarden van k is $(\alpha\beta)^k$ geconjugeerd met $\alpha\beta$?

(c) Wat is de grootst mogelijke orde van een element in S_9?

2. [**5 punten**] *EK-kettingen* bestaan uit 6 bolvormige kralen aan een gesloten ketting die elk met de vlaggen van de 4 teams die de halve finales bereikt hebben versierd zijn (er zijn dus vier verschillende soorten kralen.) De kralen kunnen vrij bewegen langs de ketting. Bepaal het aantal verschillende EK-kettingen.

3. [**6 punten**] Zij G een groep en $Z(G)$ het centrum van G. Ga na of de volgende beweringen waar of niet waar zijn. Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(a) Zij H een ondergroep van G met $H \subseteq Z(G)$. Dan is H een normaaldeler van G.

(b) Zij H een ondergroep van G met $Z(G) \subseteq H$. Dan is H een normaaldeler van G.

(c) Zij $H \subseteq G$ een normaaldeler met $\#H = 2$. Dan is $H \subseteq Z(G)$.

4. [**5 punten**] Definieer $G = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}) : a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R} \right\}$.

(a) Laat zien dat G een ondergroep is van $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$. Is G normaal in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$?

(b) Laat zien dat $H_1 = \{M_{a,0} : a \in \mathbf{R}^*\}$ en $H_2 = \{M_{1,b} : b \in \mathbf{R}\}$ ondergroepen van G zijn.

(c) Bepaal voor elk van de beide ondergroepen in (b) of hij normaal is in G, en (indien normaal) wat de bijbehorende quotientgroep is.

5. [**6 punten**] Laat S_6 de permutatiegroep op 6 elementen zijn en C_6 de cyclische group van orde 6.

(a) Hoeveel verschillende homomorfismen $f : S_6 \to C_6$ zijn er?

(b) Hoeveel verschillende homomorfismen $f : C_6 \to S_6$ zijn er?

Totaal: 27 punten. Je cijfer is (aantal punten)$/3 + 1$.