Tentamen - Complexe Functie Theorie

Vrijdag 5 juli 2024, 13:15 - 16:15 – Huygens 2.07, 2.11 & 2.14

- Vermeld op ieder vel **duidelijk leesbaar** niet alleen uw naam (met voornaam en alle voorletters), maar ook uw studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Gebruik van een **niet-grafische** rekenmachine is toegestaan.
- U mag altijd het resultaat van een (deel)-opgave als bekend veronderstellen bij een volgende opgave!

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven.

Vergeet de achterkant niet!

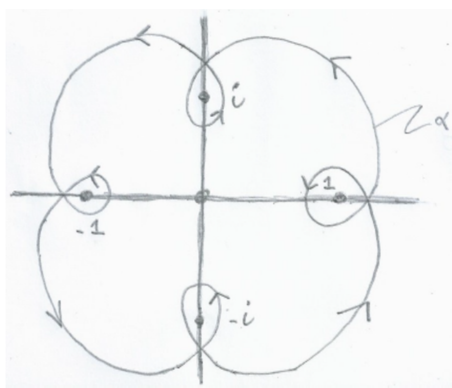
Opgave 1 Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke domein $\mathbb{C} \setminus \{-1, -i, i, 1, 0\}$ gegeven wordt door

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 1} + z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) \cos\left(\frac{1}{z}\right).$$

(a) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f het type van de betreffende singulariteit. Vermeld bij een eventuele pool ook de orde van de pool en motiveer dit getal.

(b) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f het residu van f in de betreffende singulariteit.

(c) Bereken $\int_\alpha f(z)\, dz$, waarbij het beeld van α de georiënteerde contour in de onderstaande figuur is. Geef, als u niet alle ingrediënten voor de berekening tot uw beschikking heeft, in ieder geval aan *hoe* deze integraal kan worden uitgerekend.



Opgave 2 Beschouw de functie $f : \mathbb{C} \setminus \{-2, 2\} \to \mathbb{C}$, gegeven door

$$f(z) = \frac{2z + 1}{z^2 - 4}$$

(a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks van f rond het punt $6 + 3i$.

(b) Bepaal de Laurentreeks van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 1| < 3\}$ (waarbij je je antwoord niet hoeft te vereenvoudigen).

(c) Bepaal de Laurentreeks van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| > 3\}$ (waarbij je je antwoord niet hoeft te vereenvoudigen).

Opgave 3 Beschouw voor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de analytische functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeven door

$$f(z) = \; z^2 + 2z - 8 + \alpha e^{\beta z}.$$

(a) Neem $\alpha = \beta = 1$ en laat zien dat $f(z)$ geen nulpunten heeft op de open eenheidsschijf $U_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

(b) Neem $\alpha = 7$ en laat zien dat $f(z)$ één nulpunt heeft in $U_1(0)$ als $|\beta|$ voldoende klein is.
Hint. Merk op dat $\alpha e^{\beta z} \to \alpha$ voor $z \in U_1(0)$ als $\beta \to 0$.

Opgave 4

(a) Laat door te integreren over de rechthoek met hoekpunten $\pm R$ en $\pm R + \pi i$ zien dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} x \, dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh x} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = \pi.$$

Opmerking. Het is dus niet de bedoeling dat je deze integraal via een (reële) substitutie bepaalt.

(b) Bepaal nu ook

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sech} x)^3 \, dx \left(= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{8dx}{(e^x + e^{-x})^3} \right).$$

Opgave 5

(a) Beschouw de (standaard) pool van orde 2 gegeven door $p_2(z) = \frac{1}{z^2}$ (dus $p_2 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$). We definëren de 'stralen', of 'halflijnen', $S_j(r) \in \mathbb{C}$ als volgt,

$$S_j(r) = re^{i\theta_j} \quad \text{met} \quad \theta_j \in [0, 2\pi) \;\; \text{vast en} \;\; r > 0.$$

Laat zien dat er 4 stralen $S_j(r)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ zijn waarvoor geldt dat,

$$\operatorname{Im}(p_2(S_j(r)) \equiv 0 \;\; \text{en} \;\; \lim_{r \downarrow 0} |\operatorname{Re}(p_2(S_j(r))| = \infty.$$

Voor welke θ_j geldt dat $\lim_{r\downarrow 0} \operatorname{Re}(p_2(S_j(r)) = -\infty$?

(b) Beschouw nu $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ met een pool van orde n $(n \geq 1)$ in $z = 0$ en complex analytisch voor $z \neq 0$. Laat zien dat er een complex analytische functie $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bestaat zodanig dat

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{z^n} \left(1 + zh(z)\right) \;\; \text{voor zekere} \;\; a_{-n} \in \mathbb{C}, a_{-n} \neq 0.$$

(c) Beschouw wederom $f(z)$ zoals geïntroduceerd in (b) en laat zien dat er $2n$ stralen $S_j(r)$ $(j = 1, 2, ..., 2n)$ zijn waarvoor geldt dat,

$$\lim_{r\downarrow 0} \operatorname{Im}(f(S_j(r)) = 0 \;\; \text{en} \;\; \lim_{r\downarrow 0} |\operatorname{Re}(f(S_j(r))| = \infty.$$

Voor welke waarden van θ_j geldt dat $\lim_{r\downarrow 0} \operatorname{Re}(f(S_j(r)) = -\infty$?

Einde!