Tentamen - Complexe Functie Theorie

Vrijdag 21 juni 2024, 13:15 - 16:15 – Huygens 2.04, 2.07 & 2.26

- Vermeld op ieder vel **duidelijk leesbaar** niet alleen uw naam (met voornaam en alle voorletters), maar ook uw studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Gebruik van een **niet-grafische** rekenmachine is toegestaan.
- U mag altijd het resultaat van een (deel)-opgave als bekend veronderstellen bij een volgende opgave!

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven.

Vergeet de achterkant niet!

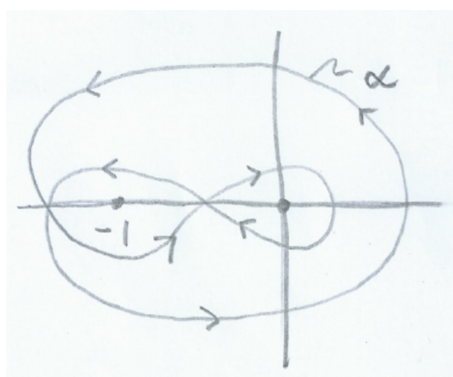
Opgave 1 Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke domein $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0\}$ in het complexe vlak, gegeven wordt door

$$f(z) = \frac{e^{z+1} - (z+2)}{(z+1)^4} + (1 + z^2) \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

(a) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f het type van de betreffende singulariteit. Vermeld bij een eventuele pool ook de orde van de pool en motiveer dit getal.

(b) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f het residu van f in de betreffende singulariteit.

(c) Bereken $\int_\alpha f(z)\, dz$, waarbij het beeld van α de georiënteerde contour in de onderstaande figuur is. Geef, als u niet alle ingrediënten voor de berekening tot uw beschikking heeft, in ieder geval aan *hoe* deze integraal kan worden uitgerekend.



Opgave 2 Beschouw de functie $f : \mathbb{C} \setminus \{-2, 2i, -2i\} \to \mathbb{C}$, gegeven door

$$f(z) = \frac{8}{z^3 + 2z^2 + 4z + 8} \quad \left(= 8 \frac{z-2}{z^4 - 16} \right).$$

(a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks van f rond het punt $-3 + 3i$.

(b) Bepaal de Laurentreeks $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$. U hoeft uw antwoord niet te vereenvoudigen, maar laat wel zien dat $a_2 = a_3 = 0$.

(c) Bepaal de Laurentreeks $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{a}_n z^n$ van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$. U hoeft uw antwoord niet te vereenvoudigen, maar geef wel expliciete uitdrukkingen voor $\tilde{a}_{-2}$ en $\tilde{a}_{-3}$.

Opgave 3 Beschouw de analytische functie $f : \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \leq 0\} \to \mathbb{C}$ gegeven door

$$f(z) = \ \mathrm{Log}(z) + 5z^2 - 30z + 43,$$

waarbij $\mathrm{Log}(z)$ de hoofdwaarde van de logaritme is.

(a) Laat zien dat $f(z)$ twee nulpunten heeft op de open eenheidsschijf $U_1(3) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| < 1\}$.
Hint. Laat zien dat voor $z = z(\theta) = 3 + e^{i\theta}$ geldt dat $|5z^2 - 30z + 43| \geq 3$.

(b) Laat zien dat de nulpunten (van $f(z)$) gevonden in (a) verschillend zijn.

Opgave 4 Beschouw voor $a \in \mathbb{C} \setminus \{a : \mathrm{Re}(a) = 0\}$ de integraal

$$\mathcal{I}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2}\, dx \ \left(= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x + ia)^2 (x - ia)^2}\, dx \right).$$

en merk op dat deze intergraal inderdaad niet gedefinieerd is als $\mathrm{Re}(a) = 0$.

(a) Laat zien dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + a^2)^2}\, dx = 0$$

zodat volgt dat

$$\mathcal{I}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + a^2)^2}\, dx.$$

(b) Neem eerst $a > 0$ (en dus $a \in \mathbb{R}$) en laat zien dat $\mathcal{I}(a) = \pi \frac{a+1}{2a^3} e^{-a}$.

(c) Beredeneer dat de in (b) gevonden uitdrukking voor $\mathcal{I}(a)$ voor alle $a \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(a) > 0$ geldt.

(d) Bepaal $\mathcal{I}(a)$ voor $a \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(a) < 0$.

(e) Laat zien dat de in (c) en (d) gevonden uitdrukkingen anders dan verwacht <u>niet</u> divergeren als $\mathrm{Re}(a) \to 0$, maar dat de deze limiet ook niet bestaat. Leg uit wat er gebeurt/misgaat.

Opgave 5

(a) Laat zien dat iedere gehele functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}\, f(z) \geq -2024$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ constant is.

(b) Zij D een eindige deelverzameling van $\mathbb{C}$ en zij $f : \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C}$ een analytische functie die begrensd is op $\mathbb{C} \setminus D$. Is deze f noodzakelijk constant? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Einde!