Hertentamen Algebra 3, 4 juli 2024 (ENGELS)

Bewijs je antwoorden en leg uit hoe je er aan komt.

Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Dit is een open-boek tentamen. Je mag de dictaten van Algebra 1, 2 en 3 gebruiken, en ook een A4-tje aan eigen aantekeningen. Voor diegenen die geen papieren dictaten hebben, zijn er tablets met de drie dictaten digitaal beschikbaar. Je mag geen andere elektronische hulpmiddelen gebruiken, ook geen rekenmachines en telefoons.

Zolang je ernaar verwijst mag je in je tentamen gebruik maken van resultaten en opgaven uit het dictaat tenzij je expliciet naar het bewijs daarvan gevraagd wordt, of er expliciet gezegd wordt dat je een opgave niet mag gebruiken.

Tablets: Op de tablets staat een grote pdf van 510 pagina's met daarin de dictaten van Algebra 3 (Engels), Algebra 3 (Nederlands), Algebra 2 en Algebra 1 (in deze volgorde). Als je begint met scrollen, dan verschijnt er rechts een scrollbar waarmee je sneller kunt scrollen. De vier dictaten beginnen op pagina 1 (Algebra 3 Engels), 117 (Algebra 3 Nederlands), 237 (Algebra 2) en 343 (Algebra 1). Als je per ongeluk de viewer "unpint", steek dan je vinger op zodat de surveillant de viewer weer kan opzetten en vast kan "pinnen".

Exercise 1. (18 points) Calculate the Galois group of the polynomial $X^3 - X - 3$ over each of the following fields:

(a) $\mathbb{Q}$;
(b) $\mathbb{R}$;
(c) $\mathbb{F}_5$.

Exercise 2. (27 points) Define $f = X^4 + 25 \in \mathbb{Q}[X]$. Let $\alpha \in \mathbb{C}$ be a root of f, and set $\beta = \alpha^3 - 5\alpha$.

(a) Show that $\beta^2 \in \mathbb{Q}$.
(b) Show that f is irreducible.
(c) Show that $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ is Galois over $\mathbb{Q}$, and determine $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.
(d) Determine all subfields of K.

Exercise 3. (24 points) For all cases below, give the degree of $\alpha \in \mathbb{C}$ over the field K, and determine the minimal polynomial f_K^α. For every n we write $\zeta_n = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$.

(a) $K = \mathbb{Q}$ and $\alpha = \sqrt{5} + i$.
(b) $K = \mathbb{Q}(\zeta_{36})$ and $\alpha = \zeta_{72}^{17}$.
(c) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ and $\alpha = \zeta_5$.

Exercise 4. (21 points) True or false? In both cases explain why (in a few sentences).

(a) There exists a prime number p such that $2, 3$, and 6 are all nonsquares in $\mathbb{F}_p$.
(b) There exists a prime number p such that the cyclotomic polynomial Φ_{17} is the product of irreducible quadratic factors in $\mathbb{F}_p[X]$.
(c) If $K \subset \mathbb{C}$ is any field of degree $[K : \mathbb{Q}] = 4$ over $\mathbb{Q}$, then every element of K is constructible using straightedge and compass from the set $\{0, 1\}$.

Hertentamen Algebra 3, 4 juli 2024 (NEDERLANDS)

Bewijs je antwoorden en leg uit hoe je er aan komt.

Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Dit is een open-boek tentamen. Je mag de dictaten van Algebra 1, 2 en 3 gebruiken, en ook een A4-tje aan eigen aantekeningen. Voor diegenen die geen papieren dictaten hebben, zijn er tablets met de drie dictaten digitaal beschikbaar. Je mag geen andere elektronische hulpmiddelen gebruiken, ook geen rekenmachines en telefoons.

Zolang je ernaar verwijst mag je in je tentamen gebruik maken van resultaten en opgaven uit het dictaat tenzij je expliciet naar het bewijs daarvan gevraagd wordt, of er expliciet gezegd wordt dat je een opgave niet mag gebruiken.

Tablets: Op de tablets staat een grote pdf van 510 pagina's met daarin de dictaten van Algebra 3 (Engels), Algebra 3 (Nederlands), Algebra 2 en Algebra 1 (in deze volgorde). Als je begint met scrollen, dan verschijnt er rechts een scrollbar waarmee je sneller kunt scrollen. De vier dictaten beginnen op pagina 1 (Algebra 3 Engels), 117 (Algebra 3 Nederlands), 237 (Algebra 2) en 343 (Algebra 1). Als je per ongeluk de viewer "unpint", steek dan je vinger op zodat de surveillant de viewer weer kan opzetten en vast kan "pinnen".

Exercise 1. (18 punten) Bepaal de Galoisgroep van het polynoom $X^3 - X - 3$ over elk van de volgende lichamen:

(a) $\mathbb{Q}$;
(b) $\mathbb{R}$;
(c) $\mathbb{F}_5$.

Exercise 2. (27 punten) Definieer $f = X^4 + 25 \in \mathbb{Q}[X]$. Zij $\alpha \in \mathbb{C}$ een nulpunt van f, en definieer $\beta = \alpha^3 - 5\alpha$.

(a) Laat zien dat er geldt $\beta^2 \in \mathbb{Q}$.
(b) Laat zien dat f irreducibel is.
(c) Laat zien dat $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ Galois is over $\mathbb{Q}$, en bepaal $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.
(d) Bepaal al de deellichamen K.

Exercise 3. (24 punten) Geef, voor elk van de gevallen hieronder, de graad van $\alpha \in \mathbb{C}$ over het lichaam K, en bepaal het minimumpolynoom f_K^α. Voor elke n schrijven we $\zeta_n = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$.

(a) $K = \mathbb{Q}$ en $\alpha = \sqrt{5} + i$.
(b) $K = \mathbb{Q}(\zeta_{36})$ en $\alpha = \zeta_{72}^{17}$.
(c) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ en $\alpha = \zeta_5$.

Exercise 4. (21 punten) Waar of niet waar? Leg in beide gevallen uit waarom (in enkele zinnen).

(a) Er is een priemgetal p zodanig dat $2, 3$ en 6 allemaal geen kwadraten zijn in $\mathbb{F}_p$.
(b) Er is een priemgetal p zodanig dat het cyclotomisch polynoom Φ_{17} het product is van irreducibele kwadratische factoren in $\mathbb{F}_p[X]$.
(c) Als $K \subset \mathbb{C}$ een lichaam is van graad $[K : \mathbb{Q}] = 4$ over $\mathbb{Q}$, dan is elk element van K construeerbaar met passer en lineaal, uitgaande van de verzameling $\{0, 1\}$.