Tentamen Algebra 3, 17 juni 2024 (ENGELS)

Bewijs je antwoorden en leg uit hoe je er aan komt.

Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Dit is een open-boek tentamen. Je mag de dictaten van Algebra 1, 2 en 3 gebruiken, en ook een A4-tje aan eigen aantekeningen. Voor diegenen die geen papieren dictaten hebben, zijn er tablets met de drie dictaten digitaal beschikbaar. Je mag geen andere elektronische hulpmiddelen gebruiken, ook geen rekenmachines en telefoons.

Zolang je ernaar verwijst mag je in je tentamen gebruik maken van resultaten en opgaven uit het dictaat tenzij je expliciet naar het bewijs daarvan gevraagd wordt, of er expliciet gezegd wordt dat je een opgave niet mag gebruiken.

Tablets: Op de tablets staat een grote pdf van 510 pagina's met daarin de dictaten van Algebra 3 (Engels), Algebra 3 (Nederlands), Algebra 2 en Algebra 1 (in deze volgorde). Als je begint met scrollen, dan verschijnt er rechts een scrollbar waarmee je sneller kunt scrollen. De vier dictaten beginnen op pagina 1 (Algebra 3 Engels), 117 (Algebra 3 Nederlands), 237 (Algebra 2) en 343 (Algebra 1). Als je per ongeluk de viewer "unpint", steek dan je vinger op zodat de surveillant de viewer weer kan opzetten en vast kan "pinnen".

Exercise 1. Calculate the Galois group of the polynomial $X^3 - X + 1$ over each of the following fields:

(a) $\mathbb{Q}$;
(b) $\mathbb{R}$;
(c) $\mathbb{F}_3$.

Exercise 2. Let $\alpha = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ and $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(a) Find the minimal polynomial of α over $\mathbb{Q}$.
(b) Show that the extension $\mathbb{Q} \subset L$ is Galois. (Hint: is $\sqrt{5}$ in L?)
(c) Calculate the Galois group $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ and all the intermediate extensions of $\mathbb{Q} \subset L$.

Exercise 3 (For this problem, you are *not* allowed to use Exercise 24.30 of the book). Set $\zeta = \zeta_{14} = e^{2\pi i/14}$ and $\beta = \zeta + \zeta^{-1}$.

(a) The cyclotomic polynomial Φ_{14} is the minimal polynomial of ζ. Show that we have $\Phi_{14}(x) = \Phi_7(-x)$.
(b) Set $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ and $K = \mathbb{Q}(\beta)$. Show that we have $K = L \cap \mathbb{R}$.
(c) Determine the degrees $[L : \mathbb{Q}]$ and $[K : \mathbb{Q}]$.
(d) Show that the minimal polynomial of β over $\mathbb{Q}$ is $X^3 - X^2 - 2X + 1$.
(e) Is it possible to construct a regular 28-gon with a straightedge and compass, starting from the points $0, 1$, and β?

Exercise 4. For each part, find a prime number p satisfying the conditions, or show that no such prime number exists.

(a) We have $[\mathbb{F}_p(\sqrt{17}, \sqrt{6}) : \mathbb{F}_p] = 4$.
(b) We have $p > 2$ and all the elements $3, 5, 7 \in \mathbb{F}_p$ are squares in $\mathbb{F}_p$.
(c) The cyclotomic polynomial Φ_{17} is the product of linear factors in $\mathbb{F}_p[X]$.

Tentamen Algebra 3, 17 juni 2024 (NEDERLANDS)

Bewijs je antwoorden en leg uit hoe je er aan komt.

Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Dit is een open-boek tentamen. Je mag de dictaten van Algebra 1, 2 en 3 gebruiken, en ook een A4-tje aan eigen aantekeningen. Voor diegenen die geen papieren dictaten hebben, zijn er tablets met de drie dictaten digitaal beschikbaar. Je mag geen andere elektronische hulpmiddelen gebruiken, ook geen rekenmachines en telefoons.

Zolang je ernaar verwijst mag je in je tentamen gebruik maken van resultaten en opgaven uit het dictaat tenzij je expliciet naar het bewijs daarvan gevraagd wordt, of er expliciet gezegd wordt dat je een opgave niet mag gebruiken.

Tablets: Op de tablets staat een grote pdf van 510 pagina's met daarin de dictaten van Algebra 3 (Engels), Algebra 3 (Nederlands), Algebra 2 en Algebra 1 (in deze volgorde). Als je begint met scrollen, dan verschijnt er rechts een scrollbar waarmee je sneller kunt scrollen. De vier dictaten beginnen op pagina 1 (Algebra 3 Engels), 117 (Algebra 3 Nederlands), 237 (Algebra 2) en 343 (Algebra 1). Als je per ongeluk de viewer "unpint", steek dan je vinger op zodat de surveillant de viewer weer kan opzetten en vast kan "pinnen".

Exercise 1. Bepaal de Galoisgroep van het polynoom $X^3 - X + 1$ over elk van de volgende lichamen:

(a) $\mathbb{Q}$;
(b) $\mathbb{R}$;
(c) $\mathbb{F}_3$.

Exercise 2. Zij $\alpha = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ en $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(a) Bepaal het minimumpolynoom van α over $\mathbb{Q}$.
(b) Laat zien dat de uitbreiding $\mathbb{Q} \subset L$ Galois is. (Hint: is $\sqrt{5}$ in L?)
(c) Bepaal de Galoisgroep $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ en alle deeluitbreidinen van $\mathbb{Q} \subset L$.

Exercise 3. (Bij deze opgave mag je *niet* gebruik maken van Opgave 24.30)
Zij $\zeta = \zeta_{14} = e^{2\pi i/14}$ en $\beta = \zeta + \zeta^{-1}$.

(a) Het cyclotomisch polynoom Φ_{14} is het minimumpolynoom van ζ. Laat zien dat er geldt $\Phi_{14}(x) = \Phi_7(-x)$.
(b) Zij $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ en $K = \mathbb{Q}(\beta)$. Laat zien dat er geldt $K = L \cap \mathbb{R}$.
(c) Bepaal de graden $[L : \mathbb{Q}]$ en $[K : \mathbb{Q}]$.
(d) Laat zien dat het minimumpolynoom van β over $\mathbb{Q}$ gelijk is aan $X^3 - X^2 - 2X + 1$.
(e) Is het mogelijk om een regelmatige 28-hoek te construeren met passer en lineaal, uitgaande van de punten $0, 1$, and β?

Exercise 4. Vind voor elk onderdeel een priemgetal p dat voldoet aan de voorwaarden, of laat zien dat zo'n priemgetal niet bestaat.

(a) Er geldt $[\mathbb{F}_p(\sqrt{17}, \sqrt{6}) : \mathbb{F}_p] = 4$.
(b) Er geldt $p > 2$ en alle elementen $3, 5, 7 \in \mathbb{F}_p$ zijn kwadraten in $\mathbb{F}_p$.
(c) Het cyclotomisch polynoom Φ_{17} is het product van lineaire factoren in $\mathbb{F}_p[X]$.