Hertentamen Lineaire Algebra 2

1 februari, 2024

9:00-12:00

Dit is een openboektentamen. Rekenmachines zijn niet toegestaan. Bewijs al je antwoorden en geef al je berekeningen. In totaal kun je 45 punten halen. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Opgave 1 (8 punten). Beschouw de reële matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een Jordannormaalvorm van A, en een bijbehorende basistransformatie. Met andere woorden, geef een matrix J in Jordannormaalvorm en een inverteerbare matrix Q zodanig dat $J = Q^{-1}AQ$.

Opgave 2 (10 punten). Zij A een reële 18×18 matrix en I de 18×18 identiteitsmatrix. Voor enkele waarden van λ en k is de rang van $(A - \lambda I)^k$ gegeven in de volgende tabellen.

M	$\mathrm{rk}(M)$
$A - 3I$	15
$(A-3I)^2$	12
$(A-3I)^3$	10
$(A-3I)^4$	10
$A - I$	15

M	$\mathrm{rk}(M)$
$A - 2I$	15
$(A-2I)^2$	13
$(A-2I)^3$	12
$(A-2I)^4$	11
$(A-2I)^5$	11

(a) Laat zien dat A een Jordannormaalvorm heeft en bepaal ook een Jordannormaalvorm van A.

(b) Bepaal het karakteristiek polynoom van A.

(c) Bepaal het minimum polynoom van A.

Op de achterkant van dit vel staan nog drie opgaven.

Opgave 3 (11 punten). Zij V de reële vectorruimte van reële polynomen van graad hooguit 2. Definieer de afbeelding

$$\begin{aligned}\varphi\colon V \times V &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (f,g) &\longmapsto \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.\end{aligned}$$

(a) Laat zien dat φ een inproduct is.

(b) Laat zien dat het rijtje $(1, x-\frac{1}{2})$ orthogonaal is, en breid het uit tot een orthogonale basis voor de inproductruimte V met dit inproduct.

(c) Zij $T\colon V \to V$ de afbeelding gedefinieerd door $T(f) = f'$ waarbij f' de afgeleide is van f. Laat zien dat V geen orthogonale basis van eigenvectoren voor T heeft.

Opgave 4 (8 punten). Gegeven zijn twee reële vectorruimtes V en W en een bilineaire vorm $\varphi\colon V \times W \to \mathbb{R}$.

(a) Laat zien dat er geldt

$$\varphi_R = \varphi_L^\top \circ \alpha_W.$$

(b) Neem aan dat W eindig-dimensionaal is. Bewijs dat φ niet-gedegenereerd is dan en slechts dan als φ_L een isomorfisme is.

Opgave 5 (8 punten). Zij V een eindig-dimensionale reële inproductruimte. Zij $f\colon V \to V$ een afbeelding die voldoet aan

$$\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$$

voor alle $v, w \in V$.

(a) Bewijs dat f lineair is.

(b) Bewijs dat f een isomorfisme en dus een isometrie is.