Tentamen Lineaire Algebra 2

16 januari, 2024

13:15-16:15

Dit is een openboektentamen. Rekenmachines zijn niet toegestaan. Bewijs al je antwoorden en geef al je berekeningen. In totaal kun je 45 punten halen. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Opgave 1 (10 punten). Beschouw de reële matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat de vector $v = (0, 1, -1)^\top$ een eigenvector is voor A.

(b) Bepaal een Jordannormaalvorm van A, en een bijbehorende basistransformatie. Met andere woorden, geef een matrix J in Jordannormaalvorm en een inverteerbare matrix Q zodanig dat $J = Q^{-1}AQ$.

(c) Vind een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N zodanig dat

$$B = D + N \qquad \text{en} \qquad ND = DN.$$

(d) Bepaal B^{2024}.

Opgave 2 (8 punten). Zij M een reële 17×17 matrix van rang $\mathrm{rk}(M) = 10$ en spoor $\mathrm{Tr}(M) = 0$ waarvoor geldt $M^3 = M$.
[Uit Lineaire Algebra 1: Het spoor (Engels: trace) $\mathrm{Tr}(A)$ van een $n \times n$ matrix A is de som van de diagonaalelementen van A; voor het karakteristiek polynoom P_A van A geldt dus $P_A(t) = t^n - \mathrm{Tr}(A)t^{n-1} + \cdots$.]

(a) Bepaal de eigenwaarden van M.

(b) Bepaal het minimum polynoom van M.

(c) Bepaal een Jordannormaalvorm voor M.

(d) Bepaal het karakteristiek polynoom van M.

Op de achterkant van dit vel staan nog vier opgaven.

Opgave 3 (6 punten). Gegeven $x \in \mathbb{R}$ beschouwen we de reële symmetrische matrix

$$C_x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & x \end{pmatrix}.$$

(a) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is de signatuur van C_x gelijk aan 3?
(b) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is de signatuur van C_x gelijk aan 0?
(c) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is de signatuur van C_x gelijk aan 1?

Opgave 4 (9 punten). Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak met normaalvector $a = (1, -1, 2)$ en $L \subset \mathbb{R}^3$ de lijn voortgebracht door a.
Zij $\rho\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ een rotatie om L over $\pi/2$.
Zij $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de spiegeling in V.
Zij $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de projectie op V.

(a) Laat zien dat de vector $v = (1, 1, 0)$ bevat is in V, en geef een vector $w \in V$ zodanig dat (v, w) een orthogonale basis is voor V.
(b) Leg voor elk van de drie afbeeldingen ρ, σ, τ uit of die *zelf-geadjungeerd* (Engels: self adjoint) is.
(c) Leg voor elk van de drie afbeeldingen ρ, σ, τ uit of die een *isometrie* is.
(d) Leg voor elk van de drie afbeeldingen ρ, σ, τ uit of die *normaal* is.

Opgave 5 (6 punten). Zij V een vectorruimte, niet per se eindig-dimensionaal. Stel dat $U_1, U_2 \subset V$ deelruimtes zijn met $V = U_1 \oplus U_2$. Geef een isomorfisme van de duale vectorruimte V^* naar het Cartesisch product $U_1^* \times U_2^*$ en bewijs dat dit daadwerkelijk een isomorfisme is.
[Uit Lineaire Algebra 1: de optelling en scalaire vermenigvuldiging op het Cartesisch product is coordinaatsgewijs gedefinieerd, dus $(\phi_1, \phi_2) + (\psi_1, \psi_2) = (\phi_1 + \psi_1, \phi_2 + \psi_2)$.]

Opgave 6 (6 punten). Zij $n \geq 1$ een geheel getal en $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ de reële vectorruimte van reële polynomen van graad hooguit n. Beschouw de lineaire afbeeldingen

$$D\colon V \to V,$$
$$e = \mathrm{ev}_0\colon V \to \mathbb{R},$$

gegeven door $D(f) = \frac{d}{dx} f$ en $e(f) = f(0)$ voor $f \in V$. Laat zien dat

$$\big(e, e \circ D, e \circ D^2, e \circ D^3, \ldots, e \circ D^n\big)$$

een basis is voor de duale vectorruimte V^*.