# Tentamen Inleiding Kansrekening

## — 28 juni 2024 —

Michel Mandjes

Bij dit tentamen is het gebruik van boek, aantekeningen en rekenmachine niet toegestaan. Wel is het toegestaan om een persoonlijke lijst van belangrijke notaties, definities en stellingen te consulteren. Er zijn 7 vragen, die elk bestaan uit onderdelen. Elk onderdeel is een aantal punten waard, dat vet gedrukt is aangegeven. Het totaal aantal punten is 100. Schrijf je naam, studentnummer en studierichting op elk blad dat je inlevert. Motiveer steeds je antwoorden: antwoorden zonder uitwerkingen leveren geen punten op. Elke berekening dient van een toelichting te worden voorzien.

(1) Zij $X_1$ normaal verdeeld met parameters $\mu_1 = 1$ en $\sigma_1^2 = 2$, en zij $X_2$ normaal verdeeld met parameters $\mu_2 = 2$ en $\sigma_2^2 = 2$. Laat de covariantie tussen $X_1$ en $X_2$ gelijk zijn aan 1.
- (a) [**4**] Bepaal $\mathbb{E}[X_1 + X_2]$.
- (b) [**4**] Bepaal $\mathrm{var}[X_1 + X_2]$.
- (c) [**4**] Bepaal $\mathbb{E}[X_1 + X_2]$ en $\mathrm{var}[X_1 + X_2]$ als de covariantie tussen $X_1$ en $X_2$ gelijk is aan 0.

(2) Zij $X_1, X_2, \ldots$ een rijtje onafhankelijke stochastische variabelen die alle exponentieel verdeeld zijn met parameter $\lambda > 0$. Zij $G$ geometrisch verdeeld met parameter $p \in (0,1)$, onafhankelijk van het rijtje $X_1, X_2, \ldots$ Definieer

$$W := \sum_{i=1}^{G} X_i.$$

- (a) [**4**] Bepaal de kansgenererende functie $\mathbb{E}\, z^G$ (voor $|z| \leqslant 1$).
- (b) [**4**] Gebruik het antwoord op (a) om $\mathbb{E}\, G$ te bepalen.
- (c) [**5**] Laat zien dat de momenten-genenerende functie van $W$ gegeven wordt (voor $\theta < \lambda p$) door

$$\mathbb{E}\, e^{\theta W} = \frac{\lambda p}{\lambda p - \theta}.$$

- (d) [**5**] Toon aan dat $W$ exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda p$.

(3) Zij $X$ exponentieel verdeeld met parameter $\mu > 0$.
- (a) [**7**] Beargumenteer dat voor alle $\theta \in [0, \mu)$ en $a > 0$

$$\mathbb{P}(X > a) \leqslant \frac{\mu}{\mu - \theta} e^{-\theta a}.$$

- (b) [**7**] Leid uit het feit dat (a) geldt voor alle $\theta \in [0, \mu)$ af dat voor $a > 1/\mu$

$$\mathbb{P}(X > a) \leqslant \exp(-a\mu + 1 + \log(a\mu)).$$

(4) Zij $X_1, X_2, \ldots$ een rijtje onafhankelijke poissonverdeelde stochastische variabelen met verwachting $\mu > 0$.
- (a) [**7**] Bepaal de kansmassafunctie van $X_1 + \cdots + X_n$ (voor $n \in \mathbb{N}$).
- (b) [**7**] Geef, voor $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, een benadering van de kans

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = m\right)$$

op basis van de centrale limietstelling.

(5) De gezamenlijke verdeling van de positieve stochasten $X$ en $Y$ wordt gegeven door de dichtheid

$$f(x,y) = xe^{-x(y+1)} \quad (x, y \in \mathbb{R}_{>0}).$$

(a) [**4**] Laat zien dat deze dichtheid tot 1 integreert.

(b) [**5**] Bepaal de conditionele dichtheid van $X$ gegeven $Y = y$, en de conditionele dichtheid van $Y$ gegeven $X = x$.

(c) [**5**] Bepaal de dichtheid van $Z := XY$.

(6) De gezamenlijke verdeling van de positieve stochasten $X$ en $Y$ wordt beschreven door de dichtheid

$$f(x,y) = \frac{1}{y}e^{-y-x/y} \quad (x, y \in \mathbb{R}_{>0}).$$

(a) [**4**] Bepaal $\mathbb{E}\,X$ en $\mathbb{E}\,Y$.

(b) [**5**] Bepaal $\mathrm{cov}(X,Y)$.

(c) [**5**] Zijn $X$ en $Y$ onafhankelijk?

(7) Beschouw een vertakkingsproces $Z = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met $Z_0$ een $\mathbb{N}$-waardige stochast met verwachting $h$ en kansgenererende functie $H(s)$. Laat $\mu$ het gemiddeld aantal nakomelingen van een individu zijn, en $G(s)$ de bijbehorende kansgenererende functie.

(a) [**5**] Bepaal $\mathbb{E}s^{Z_n}$ voor $s \in [-1, 1]$.

(b) [**4**] Bepaal $\mathbb{E}Z_n$.

(c) [**5**] Laat vanaf nu het aantal nakomelingen van een individu binomiaal verdeeld zijn met parameters 2 en $p > 1/2$. Bepaal de kans dat $Z$ overleeft.