Tentamen Inleiding Kansrekening

— 10 juni 2024 —

Michel Mandjes

Bij dit tentamen is het gebruik van boek, aantekeningen en rekenmachine niet toegestaan. Wel is het toegestaan om een persoonlijke lijst van belangrijke notaties, definities en stellingen te consulteren. Er zijn 7 vragen, die elk bestaan uit onderdelen. Elk onderdeel is een aantal punten waard, dat vet gedrukt is aangegeven. Het totaal aantal punten is 100. Schrijf je naam, studentnummer en studierichting op elk blad dat je inlevert. Motiveer steeds je antwoorden: antwoorden zonder uitwerkingen leveren geen punten op. Elke berekening dient van een toelichting te worden voorzien.

(1) Zij X poissonverdeeld met parameter $\mu > 0$.
  (a) [**4**] Bepaal de kansgenererende functie van X.
  (b) [**5**] Zij Y poissonverdeeld met parameter $\lambda > 0$, onafhankelijk van X. Bepaal de verdeling van $X + Y$.
  (c) [**5**] Zij Z binomiaal verdeeld met parameters X en $p \in [0, 1]$ (in de zin dat als $X = k$, dan Z binomiaal verdeeld is met parameters k en p). Laat zien dat Z poissonverdeeld is met parameter μp.

(2) Bekijk de stochastische variabele X met kansdichtheidsfunctie

$$f_X(x) = C\, e^{-\lambda|x|} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

met $\lambda > 0$ een parameter.
  (a) [**4**] Bepaal C.
  (b) [**5**] Bepaal $\mathbb{E}[X]$ en $\mathbb{E}[|X|]$.
  (c) [**5**] Toon aan dat $|X|$ exponentieel verdeeld is.

(3) Zijn $(C_{n,i})_{n,i}$, met $n, i \in \mathbb{N}$, onafhankelijk stochastische variabelen, elk bernoulli-verdeeld (ook wel genoemd: alternatief verdeeld) met succeskans $p \in (0, 1)$. Zij $Z = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ het hierdoor geïnduceerde vertakkingsproces, in de zin dat

$$Z_n := \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} C_{n,i}.$$

  (a) [**7**] Veronderstel dat $Z_0 = N$. Beargumenteer dat Z_n binomiaal verdeeld is met parameters N en p^n.
  (b) [**7**] Wat is de kans dat Z overleeft?

(4) Zij X exponentieel verdeeld met parameter $\lambda > 0$, en Y gammaverdeeld met parameters 2 en $\mu > 0$ (zodat de kansdichtheidsfunctie van Y gelijk is aan $\mu^2 x e^{-\mu x}$ voor $x \geqslant 0$ en 0 elders). Laat X en Y onafhankelijk zijn.
  (a) [**8**] Bepaal de momenten-genererende functies van X en Y.
  (b) [**7**] Laat zien dat

$$\mathbb{P}(X \geqslant Y) = \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^2.$$

(5) [**14**] De ongelijkheid

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant 1 - n + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

voor gebeurtenissen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ wordt soms ook wel *Bonferroni's ongelijkheid genoemd.* Bewijs haar, bijvoorbeeld met inductie.

(6) De gezamenlijke verdeling van de stochasten X en Y wordt gegeven door de dichtheid

$$f(x,y) = x + y,$$

voor $0 < x, y < 1$.

(a) [**4**] Zijn X en Y onafhankelijk?

(b) [**5**] Bepaal de dichtheid van X.

(c) [**6**] Bepaal $\mathbb{P}(X + Y < 1)$.

(7) Zij X standaard-normaal verdeeld, d.w.z. normaal verdeeld met verwachting 0 and variantie 1.

(a) [**4**] Bepaal $\Lambda(t) := \mathbb{E}e^{tX}$.

(b) [**4**] Bepaal

$$\Lambda^\star(a) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \{ta - \log \Lambda(t)\}.$$

(c) [**6**] Zij $X_1, \ldots, X_n$ een rijtje onafhankelijke en gelijk verdeelde stochastische variabelen, verdeeld als X. Neem een $a > 0$. Bepaal

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > na \right).$$