Hertentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Woensdag 27 maart 2024, 9:00-12:00

- Schrijf op ieder vel je naam, studentnummer en studierichting. Voorzie alle vellen van een nummer samen met het totaal aantal vellen.
- Geef niet alleen de eindantwoorden, maar leg ook elke stap uit die je maakt. Gebruik dus ook niet zomaar formules uit het boek zonder afleiding.
- Qua (elektronische) hulpmiddelen is alleen een simpele rekenmachine toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven en is verspreid over **twee** pagina's.

Succes!

1.) Bekijk voor alle $\alpha \neq 0$ de inhomogene eerste orde vergelijking

$$t^2 y' + \alpha t y = \sqrt{t}, \quad t > 0. \tag{1}$$

(a) Bekijk eerst de homogene vergelijking en bepaal de algemene oplossing.

(b) Neem $\alpha = 2$ en bepaal de algemene oplossing van de inhomogene vergelijking.

(c) Neem nu $\alpha \neq 0$ willekeurig en laat $y_\alpha(t)$ de algemene oplossing zijn van (1). Voor welke waarden van $\alpha \neq 0$ bestaat $\lim_{t\to\infty} y_\alpha(t)$? Wat is deze limiet?

2.) Beschouw het stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= y(4 - x^2 - y^2). \end{cases} \tag{2}$$

Definieer $(x(t;(x_0,y_0)), y(t;(x_0,y_0)))^T$ als de oplossing van (2) met beginvoorwaarde $(x_0,y_0)^T \in \mathbb{R}^2$. Oftewel, er geldt $(x(0;(x_0,y_0)), y(0;(x_0,y_0)))^T = (x_0,y_0)^T$.

(a) Bepaal de **vijf** vaste/equilibrium punten. Geef het gelineariseerde stelsel rond elk vast punt. Bepaal hieruit het karakter (zadel, centrum, focus of knoop) en de stabiliteit van dat vaste punt voor het gelineariseerde systeem. Kunnen we hieruit iets concluderen over de stabiliteit en het karakter van de vaste punten voor origineel stelsel (2)?

(b) Geef **alleen** voor het vaste punt $(0,2)$ een aparte schets van het gelineariseerde systeem rond dat punt, gebruik makende van de bijbehorende eigenvectoren.

(c) Bepaal de nullclines, schets deze in het (x,y)-vlak en geef het teken van $\dot{x}$ en $\dot{y}$ in de gebieden waarin het (x,y)-vlak door de nullclines wordt onderverdeeld. Geef ook (met pijltjes) de richting van $(\dot{x},\dot{y})$ aan op de nullclines.

(d) Neem aan dat de beginvoorwaarden (x_0,y_0) in het gebied $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ liggen, m.a.w. neem dat $(x_0,y_0) \in \mathcal{G}$, waarbij $\mathcal{G}$ gegeven is door

$$\mathcal{G} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0 \text{ en } 0 < x^2 + y^2 < 4\right\}. \tag{3}$$

Toon aan dat $\lim_{t\to\infty} \left(x\left(t;(x_0,y_0)\right), y\left(t;(x_0,y_0)\right)\right) = (0,2)$ geldt.

Vervolg op volgende pagina!

3.) Bekijk de homogene tweede orde vergelijking

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (x-1)\frac{dy}{dx} - y = 0. \tag{4}$$

(a) Laat zien dat $y(x) = e^{cx}$ een oplossing is van (4) voor een bepaalde $c \in \mathbb{R}$.

(b) Veronderstel $y(0) = 0$. Laat zien dat in dit geval de Laplace-getransformeerde functie $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$ voldoet aan de eerste orde vergelijking

$$Y'(s) + \frac{3s+2}{s(s+1)}Y(s) = 0. \tag{5}$$

(c) Bepaal de algemene oplossing van differentiaalvergelijking (5).

(d) Laat zien met behulp van (a), (b) en (c) dat de algemene oplossing van vergelijking (4) geschreven kan worden als

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2(x-1), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Hint. Schrijf $\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$ en vind de constanten $A, B, C \in \mathbb{R}$.
Opmerking. Lukt dit niet, laat het dan zien met behulp van (a) en de 'reduction of order'/'variatie van constante'-methode.

(e) Beargumenteer dat oplossingen van (4) analytisch in $x_0 = 1$ zijn — toon dus aan dat de oplossingen van de vorm $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ zijn — zonder gebruik te maken van (gevonden) expliciete uitdrukkingen. Leg ook uit waarom oplossingen van (4) wel/niet analytisch zijn in $x_0 = 0$?

4.) Beschouw het 2-dimensionale stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= 4x + y - 2x(x^2+y^2), \\ \dot{y} &= -x + 4y - x^2y - 2y(x^2+y^2). \end{cases} \tag{7}$$

Gegeven is dat $(0,0)$ het enige kritieke punt is.

(a) Bepaal het gelineariseerde stelsel rond de oorsprong. Bepaal vervolgens hieruit het karakter (zadel, centrum, focus of knoop) en de stabiliteit van de oorsprong voor het gelineariseerde systeem.

(b) Schrijf het stelsel in poolcoöordinaten r en θ.

(c) Bewijs dat er minstens 1 (niet-triviale) periodieke oplossing bestaat. Geef, ter illustratie, ook een schets van het bijbehorende faseportret in het (x, y)-vlak.

Einde!

Bijlage: Laplace transformatie tabel

$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)](t)$	$F(s) = \mathscr{L}[f(t)](s)$
1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad s > 0$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}, \quad s > 0$
$\sinh(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
$H_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
$H_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$

waarbij

$$H_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < c, \\ 1, & t \ge c. \end{cases}$$