Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Maandag 8 januari 2024, 9:00-12:00

- Schrijf op ieder vel je naam, studentnummer en studierichting. Voorzie alle vellen van een nummer samen met het totaal aantal vellen.
- Geef niet alleen de eindantwoorden, maar leg ook elke stap uit die je maakt. Gebruik dus ook niet zomaar formules uit het boek zonder afleiding.
- Qua elektronische hulpmiddelen is alleen een simpele rekenmachine toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven en is verspreid over **twee** pagina's.

Succes!

1.) Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' - y = g(t), \tag{1}$$

waarbij $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voldoende glad is.

(a) Bepaal de algemene oplossing $y_{\text{hom}}(t)$ van het homogene probleem ($g(t) \equiv 0$).

(b) Laat voor $y_{\text{hom}}(t)$ als in (a) zien dat $\lim_{t\to\infty} y_{\text{hom}}(t)e^{-\mu t} = 0$ voor alle $\mu > 1$.

(c) Bepaal de algemene oplossing $y_{\text{inh}}(t)$ van het inhomogene probleem voor een algemene functie $g(t)$.

Neem vanaf nu altijd aan dat er een constante $M > 0$ bestaat zodanig dat $|g(t)| < M$ geldt voor alle $t \geq 0$.

(d) Laat nu ook voor $y_{\text{inh}}(t)$ zien dat $\lim_{t\to\infty} y_{\text{inh}}(t)e^{-\mu t} = 0$ geldt voor alle $\mu > 1$. *Hint.* Schat eerst de termen $|\int_0^t g(s)e^s ds|$ en $|\int_0^t g(s)e^{-s} ds|$ af.

(e) Laat $y_N(t)$ een oplossing zijn van vergelijking (1) met de eigenschap dat $y_N(t)$ van boven en beneden begrensd is op $[0, \infty)$ door de constante $N > 0$. Oftewel, er geldt $|y(t)| < N$ voor alle $t \geq 0$. Bestaat in dit geval de limiet $\lim_{t\to\infty} y_N(t)$? Zo ja, geef een bewijs. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

2.) Beschouw het 2-dimensionale stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - 2x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= -x + xy - 2y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \tag{2}$$

Gegeven is dat $(0, 0)$ het enige kritieke punt is.

(a) Bepaal het gelineariseerde stelsel rond de oorsprong. Bepaal vervolgens hieruit het karakter (zadel, centrum, focus of knoop) en de stabiliteit van de oorsprong voor het gelineariseerde systeem.

(b) Schrijf het stelsel in poolcoördinaten r en θ.

(c) Bewijs dat er minstens 1 (niet-triviale) periodieke oplossing bestaat. Geef, ter illustratie, ook een schets van het bijbehorende faseportret in het (x, y)-vlak.

Vervolg op volgende pagina!

3.) Bekijk de eerste orde inhomogene vergelijking

$$x(1-x^4)\frac{dz}{dx} = -4x^4 z + f(x) \tag{3}$$

met $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar.

(a) Bekijk eerst de homogene vergelijking waarvoor $f(x) \equiv 0$. Bepaal de algemene oplossing van de vergelijking.

(b) Beschouw nu $f(x) = x^4$ en bepaal de algemene oplossing van de inhomogene vergelijking (3). Geef ook de oplossing in termen van $z(0) = z_0$.

(c) Merk op dat voor alle oplossingen van vergelijking (3) met $f(x) = x^4$ er geldt dat $z(1) = \frac{1}{4}$. Is dit in tegenspraak met de existentie- en uniciteitsstelling? Leg duidelijk uit waarom wel of niet.

4.) Beschouw het 2-dimensionale stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(x-y), \\ \dot{y} &= y(y+x^2-6). \end{cases} \tag{4}$$

Definieer $(x(t;(x_0,y_0)), y(t;(x_0,y_0)))^T$ als de oplossing van (4) met beginvoorwaarde $(x_0,y_0)^T \in \mathbb{R}^2$. Oftewel, er geldt $(x(0;(x_0,y_0)), y(0;(x_0,y_0)))^T = (x_0,y_0)^T$.

(a) Bepaal alle vaste/equilibrium punten. Geef het gelineariseerde stelsel rond elk vast punt en bepaal de stabiliteit van dat vaste punt voor het gelineariseerde systeem. Kunnen we hieruit iets concluderen over de stabiliteit van de vaste punten voor het gehele stelsel (4)?

(b) Geef voor alle vast punten — behalve voor $(0,0)^T$ — een aparte schets van het gelineariseerde systeem rond dat punt, gebruik makende van de bijbehorende eigenvectoren. Vermeld hierbij het karakter (zadel, centrum, focus of knoop).

(c) Bepaal de nullclines, schets deze in het (x,y)-vlak en geef het teken van $\dot{x}$ en $\dot{y}$ in de gebieden waarin het (x,y)-vlak door de nullclines wordt onderverdeeld. Geef ook (met pijltjes) de richting van $(\dot{x},\dot{y})$ aan op de nullclines.

(d) Bekijk nu een willekeurige oplossing met beginvoorwaarde $(x_0,y_0)^T$, waarbij

$$-3 < x_0 < 0 \quad \text{en} \quad x_0 < y_0 < 6 - x_0^2. \tag{5}$$

Bewijs dan dat $\lim_{t\to\infty}(x(t;(x_0,y_0)), y(t;(x_0,y_0)))^T = (0,0)^T$ geldt.

Einde!