Hertentamen Lineaire Algebra 1
woensdag 24 januari 2024, 9:00–12:00

Alle opgaven zijn evenveel waard. Je mag het dictaat en je eigen aantekeningen gebruiken, maar je mag opgaven uit het dictaat **niet** zonder bewijs gebruiken. Je mag een rekenmachine gebruiken, maar geen andere elektronische hulpmiddelen. **Om alle punten te halen moet je alle tussenstappen laten zien en elk antwoord motiveren.** Succes!

1. Zij $a = (-1, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Zij $s_{a^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de spiegeling in $a^\perp$. Vind $s_{a^\perp}((1, 1, 0))$.

(b) Vind vectoren $b, c \in \mathbb{R}^3$ die een basis voor $a^\perp$ vormen. Vergeet niet om je antwoord te motiveren.

(c) i. Geef één element (niet nul) van $E_1(s_{a^\perp}^{2024})$.
ii. Geef één element (niet nul) van $E_2(s_{a^\perp} + \mathrm{id})$.

2. Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Vind een matrix in gereduceerde rij-echelonvorm die rij-equivalent is met A.

(b) Vind een basis voor de kern van A.

(c) Beschrijf alle oplossingen van $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. In deze opgave werken we over het lichaam $\mathbb{R}$. Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat het karakteristieke polynoom van A gelijk is aan $t^3 - t^2$.

(b) Bepaal de eigenwaarden van A en voor iedere eigenwaarde een basis voor de eigenruimte.

(c) Geef, voor iedere eigenwaarde, de algebraïsche multipliciteit en de geometrische multipliciteit.

(d) Is A diagonaliseerbaar? Motiveer je antwoord.

Op de volgende pagina staan nog meer opgaven

4. Definieer de afbeelding $\phi\colon\ \mathrm{Map}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ door $(\phi(f))(x) = f(x+1)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Laat zien dat ϕ een lineaire afbeelding is.

(b) Laat zien dat 1 een eigenwaarde van ϕ is, en geef twee lineair onafhankelijke elementen van $E_1(\phi)$.

(c) Laat zien dat iedere $\lambda \in \mathbb{R}$ met $\lambda \neq 0$ een eigenwaarde is van ϕ.

5. (a) Zij A de 3×1 matrix $(1\ 0\ \ -2)^\top$ en zij B de 1×3 matrix $(2\ 3\ \ -1)$. Bereken de 3×3 matrix AB en laat zien dat deze rang 1 heeft.

(b) Zij n een positief geheel getal, zij A een $n \times 1$ matrix en zij B een $1 \times n$ matrix. Laat zien dat het product AB een $n \times n$ matrix van rang ≤ 1 is.

(c) Laat zien dat iedere $n \times n$ matrix van rang ≤ 1 gelijk is aan een product AB zoals in (b).

6. Waar of niet waar? Geef een kort bewijs als de uitspraak waar is. Als het niet waar is, geef dan een tegenvoorbeeld waar dat uit blijkt. Vergeet niet ook je conclusie duidelijk te melden: **waar** of **niet waar**?

(a) Als A een 2×2 matrix is met $\ker(A) \neq \{0\}$, dan geldt $A^2 = 0$.

(b) Zij A een 2×2 matrix. Als er een eigenwaarde van A bestaat met algebraïsche multipliciteit 1, dan is A diagonaliseerbaar.

(c) Als $f\colon V \to V$ een lineaire afbeelding is met $\dim(V)$ oneindig, dan is $\mathrm{rk}(f)$ oneindig.