Tentamen Lineaire Algebra 1
donderdag 4 januari 2024, 9:00–12:00

Alle opgaven zijn evenveel waard. Je mag het dictaat en je eigen aantekeningen gebruiken, maar je mag opgaven uit het dictaat **niet** zonder bewijs gebruiken. Je mag een rekenmachine gebruiken, maar geen andere elektronische hulpmiddelen. **Om alle punten te halen moet je alle tussenstappen laten zien en elk antwoord motiveren.** Succes!

1. Zij $a = (2, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Zij $s_{a^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de spiegeling in $a^\perp$. Vind $s_{a^\perp}((1, 1, 0))$.

(b) Vind vectoren $b, c \in \mathbb{R}^3$ die een basis voor $a^\perp$ vormen. Vergeet niet om je antwoord te motiveren.

(c) Zij $\pi_{a^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de orthogonale projectie op $a^\perp$.

i. Geef een element, niet nul, van $\ker(\pi_{a^\perp} - s_{a^\perp})$.

ii. Geef een element, niet nul, van $\ker((\pi_{a^\perp})^{2024})$.

2. Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vind een matrix in gereduceerde rij-echelonvorm die rij-equivalent is met A.

(b) Vind een basis voor de kern van A.

(c) Beschrijf alle oplossingen van $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. In deze opgave werken we over het lichaam $\mathbb{R}$. Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat het karakteristieke polynoom van A gelijk is aan $t^3 - 1$.

(b) Bepaal de eigenwaarden van A en voor iedere eigenwaarde een basis voor de eigenruimte.

(c) Geef, voor iedere eigenwaarde, de algebraïsche multipliciteit en de geometrische multipliciteit.

(d) Is A diagonaliseerbaar? Motiveer je antwoord.

Op de volgende pagina staan nog meer opgaven

4. Zij $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en zij $\mathbb{R}[x]_n$ de vectorruimte (over $\mathbb{R}$) van alle polynomen van graad $\leq n$ met reële coëfficiënten. Je mag zonder bewijs gebruiken: $\dim \mathbb{R}[x]_n = n+1$. Definieer een afbeelding

$$\phi\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad \phi(P) = (P(0), P(1), \ldots, P(n)).$$

Je mag aannemen dat ϕ lineair is.

(a) Laat zien dat ϕ injectief is. *[Hint: als $\phi(P) = 0$ dan weet je een aantal factoren van het polynoom P.]*

(b) Concludeer dat ϕ surjectief is.

(c) Neem $n = 3$. Zij E de standaardbasis van $\mathbb{R}^4$ en zij B de basis $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ van $\mathbb{R}[x]_3$. Vind de matrix $[\phi]_E^B$.

(d) Vind een polynoom P van graad 2 zodat $P(0) = 1$, $P(1) = 2$ en $P(2) = -1$.

5. De *tensorrang* van een $n \times n$ matrix M, geschreven $\mathrm{trk}(M)$, is het minimum aantal r waarvoor M geschreven kan worden als $M = A_1 + \cdots + A_r$ met $A_1, \ldots, A_r$ allemaal $n \times n$ matrices van rang 1.

(a) Bewijs: voor $n \times n$ matrices A en B geldt $\mathrm{im}(A+B) \subset \mathrm{im}(A) + \mathrm{im}(B)$.

(b) Concludeer dat voor iedere $n \times n$ matrix M geldt $\mathrm{rk}(M) \leq \mathrm{trk}(M)$.

(c) Zij M een $n \times n$ matrix met rang r. Laat zien dat M geschreven kan worden als de som van r $n \times n$ matrices van rang 1, en concludeer dat $\mathrm{trk}(M) \leq \mathrm{rk}(M)$. *[Hint: bewijs het eerst voor M in rij-echelonvorm.]*

6. Waar of niet waar? Geef een kort bewijs als de uitspraak waar is. Als het niet waar is, geef dan een tegenvoorbeeld waar dat uit blijkt. Vergeet niet ook je conclusie duidelijk te melden: **waar** of **niet waar**?

(a) Als $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ een lineaire afbeelding is, dan geldt $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{0\}$.

(b) Als een $n \times n$ matrix A rij-equivalent is met I_n, dan is $A^\top$ ook rij-equivalent met I_n.

(c) Stel dat A, B twee $n \times n$ matrices zijn met $AB = BA$. Als v een eigenvector voor A is, dan is Bv ook een eigenvector voor A.