Hertentamen Algebra 2

Vrijdag 26 januari 2024, 9:00–12:00

- Bij dit tentamen mogen de dictaten Algebra 1 en 2 gebruikt worden, maar **geen** andere documenten.
- Er zijn **5 opgaven**.
- Motiveer je antwoorden, en vermeld welke stellingen je gebruikt.
- Als je resultaten uit opgaven gebruikt, geef dan ook een bewijs erbij.
- Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.

Opgave 1. Ontbind de volgende ringelementen in irreducibele factoren:
(a) $5 + 7i$ in $\mathbb{Z}[i]$;
(b) $2024X^3 + X + 26$ in $\mathbb{Z}[X]$;
(c) $(Y - 1)X^6 - (Y^2 - 1)X^4 + (Y^3 - Y)X^2 + Y^2 - 1$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$.

Opgave 2. Bepaal voor elk van de negen geordende paren (R, S) met R en S uit de verzameling ringen $\{\mathbb{F}_2[\epsilon], \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{F}_2[X]\}$ het aantal ringhomomorfismen van R naar S. Hier is $\mathbb{F}_2[\epsilon]$ de ring van orde 4 met $\epsilon^2 = 0$.

Opgave 3. Voor deze opgave mag je opgave 51 van hoofdstuk 11 gebruiken zonder bewijs.

1. Laat zien dat $(Y - X^2 + 4) \subset \mathbb{Z}[X, Y]$ een priemideaal is, maar geen maximaal ideaal.
2. Is $(Y, Y - X^2 + 4) \subset \mathbb{Z}[X, Y]$ een priemideaal?
3. Is $(X, Y - X^2 + 4) \subset \mathbb{Z}[X, Y]$ een priemideaal?
4. Laat zien dat $(7, X, Y - X^2 + 4) \subset \mathbb{Z}[X, Y]$ een maximaal ideaal is.

Vergeet de opgaven op de achterkant niet!

Opgave 4. Beschouw $\mathbb{Q}[X] \oplus \mathbb{Q}[X]$ als $\mathbb{Q}[X]$-moduul via

$$p \cdot (f, g) := (pf, pg)$$

voor alle $p \in \mathbb{Q}[X]$ and $(f, g) \in \mathbb{Q}[X] \oplus \mathbb{Q}[X]$. We beschouwen de verzameling

$$M = \{(f, g) \in \mathbb{Q}[X] \oplus \mathbb{Q}[X] \mid Xf + g \equiv 0 \mod (X^2)\}.$$

(a) Bewijs dat M een $\mathbb{Q}[X]$-deelmoduul van $\mathbb{Q}[X] \oplus \mathbb{Q}[X]$ is.
(b) Zij $\pi \colon \mathbb{Q}[X] \oplus \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ de projectie op de tweede coördinaat. Laat zien dat het beeld van M onder π gelijk is aan $(X) \subset \mathbb{Q}[X]$.
(c) Bepaal een $\mathbb{Q}[X]$-basis van M.

Opgave 5. Zij R commutatieve ring en zij $S \subset R$ een deelring die een domein is. Zij $I \subset R$ een ideaal met de volgende twee eigenschappen:

- $I \cap S = \{0\}$;
- voor alle idealen $J \supsetneq I$ van R geldt $J \cap S \neq \{0\}$.

(a) Zij $\iota \colon S \to R$ de inclusieafbeelding en zij $\pi \colon R \to R/I$ de quotiëntafbeelding. Bewijs dat de samenstelling $\pi \circ \iota \colon S \to R/I$ injectief is.
(b) Zij $R = \mathbb{Z}[i]$ en $S = \mathbb{Z}$. Laat zien dat er een I als hierboven bestaat zodat S niet ringisomorf is met R/I.
(c) Stel S is een lichaam. Laat zien dat R/I een lichaam is.
(d) Stel $R = \mathbb{C}[X, Y]$ en $S = \mathbb{C} \subset R$. Bewijs dat er, voor elke I als hierboven, een ringisomorfisme $S \cong R/I$ bestaat.
[Hint: hoe zien de maximale idealen van $\mathbb{C}[X, Y]$ eruit?]