Tentamen Algebra 2

Vrijdag 5 januari 2024, 9:00–12:00

- Bij dit tentamen mogen de dictaten Algebra 1 en 2 gebruikt worden, maar **geen** andere documenten.
- Er zijn **5 opgaven**.
- Motiveer je antwoorden, en vermeld welke stellingen je gebruikt.
- Als je resultaten uit opgaven gebruikt, geef dan ook een bewijs erbij.
- Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.

Opgave 1. Ontbind de volgende ringelementen in irreducibele factoren:

(a) $4 + 7i$ in $\mathbb{Z}[i]$;
(b) $X^{11} + (Y^4 - 4Y^2 + 4)X^7 + Y^2 - 2$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$;
(c) $3X^4 + 13X^2 - X + 2$ in $\mathbb{Z}[X]$.

Opgave 2.

(a) Hoeveel ringhomorfismen zijn er van $\mathbb{Z}$ naar $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

Laat $\phi\colon \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de afbeelding zijn die $f \in \mathbb{Z}[X]$ stuurt naar $(f(0), f(1))$. Je mag gebruiken dat dit een ringhomomorfisme is.

(b) Is ϕ surjectief?
(c) Laat zien dat de kern van ϕ een hoofdideaal is en geef een voortbrenger.
(d) Hoeveel ringhomomorfismen zijn er van $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ naar $\mathbb{Z}$?

Opgave 3. Voor deze opgave mag je opgave 51 van hoofdstuk 11 gebruiken zonder bewijs.

(a) Bepaal alle idealen van $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - X^2)$. Welke zijn priem en welke maximaal? [Hint: niet de triviale idealen vergeten.]
(b) Zijn de volgende idealen priemidealen? Zijn het maximale idealen?
   1. $(X^2 + XY + 2, Y - X) \subset \mathbb{R}[X, Y]$;
   2. $(X^2 + XY + 2, Y - X) \subset \mathbb{Z}[X, Y]$;
   3. $(X^2 + XY + 2, Y + X) \subset \mathbb{R}[X, Y]$;
   4. $(X^2 + XY + 2, Y + X) \subset \mathbb{Z}[X, Y]$.

Vergeet de opgaven op de achterkant niet!

Opgave 4. Geef een verzameling voortbrengers voor de additieve groep

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : 15x + 6y + 10z = 0\},$$

waarvan het aantal zo klein mogelijk is.

Opgave 5. Zij R een ring en laat

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

een kort exact rijtje van R-modulen zijn.

(a) Bewijs dat $\mathrm{Ann}_R(B) \subseteq \mathrm{Ann}_R(A) \cap \mathrm{Ann}_R(C)$.

(b) Bewijs dat $\mathrm{Ann}_R(A) \cdot \mathrm{Ann}_R(C) \subseteq \mathrm{Ann}_R(B)$.

(c) Laat zien dat er een ring R bestaat en een kort exact rijtje als hierboven, waarvoor $\mathrm{Ann}_R(B) \neq \mathrm{Ann}_R(A) \cap \mathrm{Ann}_R(C)$.

(d) Laat zien dat er een ring R bestaat en een kort exact rijtje als hierboven, waarvoor $\mathrm{Ann}_R(A) \cdot \mathrm{Ann}_R(C) \neq \mathrm{Ann}_R(B)$.