Hertentamen Inleiding in de Algebraïsche Topologie

28 maart 2023, 9–12 uur

Maak de volgende **vijf** opgaven.
Motiveer uw antwoorden.
Wees hierbij beknopt maar volledig.
Benoem kort de resultaten uit de syllabus die u gebruikt.
De in totaal tien deelopgaven zijn allemaal evenveel punten waard.

Opgave 1. We beschouwen S^3 als de deelruimte van $\mathbb{C}^2$ gegeven als de verzameling van alle punten $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ waarvoor $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Voor $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ zetten we $\boldsymbol{\mu}_n = \{\zeta \in \mathbb{C}^\times : \zeta^n = 1\}$. We hebben een even werking van $\boldsymbol{\mu}_n$ op S^3 via het voorschrift $\zeta \cdot (z, w) := (\zeta z, \zeta w)$ voor $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_n$, $z, w \in \mathbb{C}$. (U hoeft dit hier niet te verifiëren.)

(i) Definieer $Y_n := S^3/\boldsymbol{\mu}_n$. Bereken de fundamentaalgroep van Y_n.

(ii) Gegeven is een continue afbeelding $f\colon Y_{2022} \to Y_{2023}$.
Bepaal het aantal lifts $\widetilde{f}\colon Y_{2022} \to S^3$ van f langs de projectie $p\colon S^3 \to Y_{2023}$.

Opgave 2. Zij $X = S^1$. Laat $U, V \subset X$ open deelverzamelingen zijn met $X = U \cup V$ en U, V enkelvoudig samenhangend. Laat zien dat $U \cap V$ uit minstens twee samenhangscomponenten bestaat.

Opgave 3. Voor elke $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ schrijven we X_n voor een boeket van n cirkels, d.w.z. een ruimte bestaande uit n cirkels, aan elkaar gelijmd in één punt. Laat Q_8 de eindige quaternionengroep zijn, d.w.z. de groep $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ met neutraal element 1 en de relaties

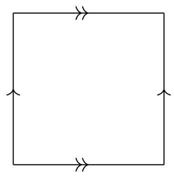
$$(-1)^2 = 1\,, \quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\,.$$

(i) Bepaal de minimale $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ zodat X_n een Q_8-overdekking $p\colon Y \to X_n$ toelaat.

(ii) Bepaal de minimale $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ zodat X_n een Q_8-overdekking $p\colon Y \to X_n$ toelaat met Y samenhangend.

(z.o.z.)

Opgave 4. De torus $T = S^1 \times S^1$ kan in grafische termen als volgt worden weergegeven:

$T =$ 

Laat $p, q \in T$ twee verschillende punten zijn. Zet $U = T \setminus \{p\}$ en $Y = T \setminus \{p, q\}$.

(i) De ruimte U is homotopie-equivalent met de achtfiguur. Maak dit aan de hand van bovenstaand plaatje aannemelijk, waarbij u voor p bijvoorbeeld het middelpunt van het vierkant neemt.

(ii) Wat zijn de homologiegroepen van de ruimte U?

(iii) Bepaal de homologiegroepen van de ruimte Y.

Opgave 5. (i) Geef de definitie van de graad van een continue afbeelding $f: S^n \to S^n$.

Een reële 3×3-matrix A heet orthogonaal als $A \cdot A^t$ de eenheidsmatrix is. Hier staat A^t voor de getransponeerde van A. Zij A een orthogonale 3×3-matrix. Vat A op als een lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. De beperking van A tot $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ geeft een continue afbeelding $f_A: S^2 \to S^2$. (U hoeft dit hier niet te verifiëren.)

(ii) Neem aan dat A orthogonaal *en* symmetrisch is, met eigenwaarden $1, 1, -1$. Bereken de graad van f_A.
Hint: we kunnen A diagonaliseren met een orthogonale matrix. Wat weet u van de graad van een spiegeling?