Tentamen Inleiding in de Algebraïsche Topologie

18 januari 2023, 13:15 – 16:15

Maak de volgende **vijf** opgaven.
Motiveer je antwoorden. Wees hierbij beknopt maar volledig.
De in totaal tien deelopgaven zijn allemaal evenveel punten waard.

Opgave 1. Zij Y het open interval $(-1, 1)$ in $\mathbb{R}$. Zij $p\colon Y \to S^1$ de continue afbeelding gegeven door $t \mapsto \exp(2\pi i t)$. Is p een overdekkingsafbeelding? Motiveer uw antwoord.

Opgave 2. (i) Gegeven zijn groepen P, S en een pushout diagram van groepen

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \{e\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{e\} & \longrightarrow & S \end{array}$$

Hierbij staat $\{e\}$ voor een triviale groep. Laat zien dat S een triviale groep is. Betrek in uw antwoord de definitie van een pushout diagram van groepen.

(ii) Laat zien dat voor $n \geq 2$ de eenheidsbol S^n enkelvoudig samenhangend is. Formuleer duidelijk de stelling(en) die u gebruikt.

Opgave 3. Laat (X, x) en (Y, y) twee gepunte topologische ruimten zijn en $f\colon (Y, y) \to (X, x)$ een continue afbeelding.

(i) Laat $h_1\colon \pi_1(X, x) \to H_1(X)$ en $h_2\colon \pi_1(Y, y) \to H_1(Y)$ de kanonieke groepshomomorfismen zijn uit de stelling van Hurewicz. Laat zien dat het diagram

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y, y) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X, x) \\ \downarrow{\scriptstyle h_2} & & \downarrow{\scriptstyle h_1} \\ H_1(Y) & \xrightarrow{f_*} & H_1(X) \end{array}$$

commutatief is.

(ii) Zij $T = S^1 \times S^1$ de torus. Laat zien dat voor alle overdekkingsafbeeldingen $p\colon Y \to T$ met Y samenhangend de afbeelding $p_*\colon H_1(Y) \to H_1(T)$ injectief is.

(iii) Zij $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ de vrije groep op de twee voortbrengers a, b. Zij $P \subset \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ de ondergroep voortgebracht door $aba^{-1}b^{-1}$. Beredeneer dat $P \cong \mathbb{Z}$.

(iv) Zij X de achtfiguur. Laat zien dat er een samenhangende ruimte Y bestaat met een overdekkingsafbeelding $p\colon Y \to X$ zodanig dat de afbeelding $p_*\colon H_1(Y) \to H_1(X)$ niet injectief is.

(z.o.z.)

Opgave 4. Gegeven is een samenhangende topologische ruimte X met twee open deelverzamelingen U, V zodat de volgende eigenschappen gelden:

(a) de ruimtes U en V zijn samenhangend;

(b) $X = U \cup V$;

(c) $H_1(X) = 0$.

Laat zien dat $U \cap V$ samenhangend is. Formuleer duidelijk de stelling(en) die u gebruikt.

Opgave 5. (i) Beschouw S^1 als een deelruimte van $\mathbb{R}^2$. Geef een homotopie van de continue afbeelding $f\colon S^1 \to S^1$ gegeven door $(x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1)$ naar de identiteit op S^1.

(ii) Beschouw S^2 als een deelruimte van $\mathbb{R}^3$. Laat zien dat de continue afbeelding $g\colon S^2 \to S^2$ gegeven door $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_2, x_1, -x_3)$ niet homotoop is met de identiteit op S^2. Formuleer duidelijk de stelling(en) die u gebruikt.