Hertentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Maandag 11 maart 2019, 10:00-13:00

- Schrijf op ieder vel naam, studentnummer en studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die je maakt. Gebruik dus ook geen formules uit het boek zonder afleiding.
- Er worden exacte antwoorden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven.

Succes!

---

1. Bekijk voor alle $\alpha \in \mathbf{R}$ de inhomogene eerste orde vergelijking,

$$t^2 \frac{dx}{dt} + \alpha t x = t^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

voor $t > 0$.

(a) Bekijk eerst de homogene vergelijking en bepaal de algemene oplossing daarvan voor $\alpha \in \mathbf{R}$.

(b) Neem nu $\alpha = 2$ en bepaal de algemene oplossing van de inhomogene vergelijking.

(c) Neem $\alpha \in \mathbf{R}$ en laat $x_\alpha(t)$ de algemene oplossing zijn van (1). Voor welke $\alpha \in \mathbf{R}$ bestaat $\lim_{t\to\infty} x_\alpha(t)$? Wat is deze limiet?

2. Bekijk het stelsel,

$$\begin{cases} \dot{x} &=& -2x, \\ \dot{y} &=& y, \end{cases} \tag{2}$$

(a) Schets het fasevlak behorende bij het stelsel (2). Wat is het karakter (zadel, centrum, focus of knoop) van het vaste punt in de oorsprong. Is dit stabiel of niet?

(b) Zij $0 < \eta < 1$ en laat $(x_\eta(t), y_\eta(t))^T$ de oplossing van (2) zijn die voldoet aan de beginvoorwaarde $x(0) = 1, y(0) = \eta$. Bewijs dat er een $\tau = \tau(\eta)$ bestaat zodat $0 < x_\eta(\tau) \le 1$ en $y_\eta(\tau) = 1$. Bepaal $\tau(\eta)$ en laat zien dat $x(\tau(\eta)) = \eta^2$.

(c) Definieer de afbeelding $f : [0,1] \to [0,1]$ met

$$f(\eta) = \begin{cases} x(\tau(\eta)) & \text{als} \quad 0 < \eta \le 1, \\ 0 & \text{als} \quad \eta = 0, \end{cases} \tag{3}$$

Laat zien dat er een $0 \le k < 1$ bestaat zodanig dat

$$|f(x) - f(y)| \le k|x - y|,$$

voor $x, y \in [0, \varepsilon]$ voor een $\varepsilon > 0$ en klein genoeg.

!! Vervolg op achterkant !!

3. Bekijk

$$2t\frac{d^2y}{dt^2} + (4t-2)\frac{dy}{dt} - 4y = 0.$$

(a) Laat zien dat $y_1(t) = e^{ct}$ een oplossing is van de vergelijking en bepaal c.

(b) Bepaal een tweede oplossing van de vergelijking die lineair onafhankelijk van y_1 is. Geef de algemene oplossing van de vergelijking.

(c) Bepaal de oplossing die voldoet aan de beginvoorwaarden $y(1) = 2;\ y'(1) = -1$.

(d) Beargumenteer dat de oplossingen van deze vergelijking analytisch in $t = 0$ zijn, zonder gebruik te maken van de expliciete oplossingen; dat wil zeggen, toon aan dat de oplossingen van de vorm $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ zijn.

4.) Beschouw het stelsel,

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y(b+x), \\ \dot{y} &= x + x^2. \end{cases} \tag{4}$$

Beschouw het stelsel voor $b > 0$. Het systeem blijkt zich anders te gedragen voor $0 < b < 1$, $b = 1$ en $b > 1$. Stel eerst $b = 2 > 1$.

(a) Bepaal de vaste/equilibriumpunten van (4). Bepaal het gelineariseerde systeem rond elk van deze punten en geef voor elk punt aan of het asymptotisch stabiel, stabiel of instabiel is in het gelineariseerde systeem. Wat zegt dit over de stabiliteit van de vaste punten in het niet-gelineariseerde systeem (4)?

(b) Geef voor elk vast punt een aparte schets van het gelineariseerde systeem rond dat punt. Bepaal ook het bijbehorende karakter (zadel, centrum, focus of knoop) van dat vaste punt voor het gelineariseerde stelsel.

Stel nu $b = 1$ (hier treedt een bifurcatie op) en neem dit aan in alle volgende onderdelen.

(c) Bepaal de vaste/equilibrium punten.

(d) Introduceer poolcoordinaten $x = \rho\cos(\theta), y = \rho\sin(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, in het stelsel. Laat zien dat het stelsel onder deze transformatie overgaat in het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= 0, \\ \dot{\theta} &= 1 + \rho\cos(\theta). \end{cases} \tag{5}$$

(e) Uit de differentiaalvergelijking voor ρ volgt dat $\rho(t) = C$ voor $C \geq 0$. Bepaal hiermee het aantal vaste punten voor de vergelijking van θ, afhankelijk van de waarde van C.

(f) Schets het fasevlak behorende bij het stelsel (4) met $b = 1$. Geef ook (met pijltjes) de richting van $(\dot{x}, \dot{y})$ aan.

(g) Bekijk nu oplossing met beginvoorwaarde $(x_0, y_0)^T = (2, 0)^T$. Schets de componenten $x(t)$ en $y(t)$ van deze oplossing als functie van t; de expliciete oplossing van $x(t)$ en $y(t)$ hoeven niet gegeven te worden. Bepaal $\lim_{t\to\infty} x(t)$ en $\lim_{t\to\infty} y(t)$, deze limieten hoeven niet bewezen te worden, een korte uitleg volstaat.