Tentamen Projectieve Meetkunde

14 juni 2018 14.00 - 17.00

Opgave 1

Zij V een vectorruimte van dimensie n. Beschouw de afbeelding $f : V \times V \to \Lambda^2 V$ gegeven door:

$$f : (v, w) \to v \wedge w.$$

a) (2p) Voor welke waarden van $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ is f injectief?

b) (3p) Voor welke waarden van $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ is f surjectief?

Opgave 2

We voorzien $\mathbb{P}^2$ resp. $\mathbb{P}^3$ van homogene coördinatien $(x_0 : x_1 : x_2)$ resp. $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$.

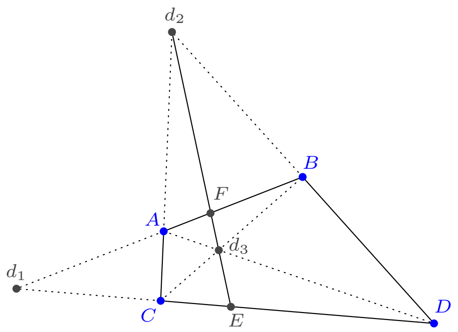
a) (2p) Bereken het snijpunt van de lijn $L : x_1 - 2x_2 = 0$ en de lijn $M : x_0 + x_1 + x_2 = 0$.

b) (3p) Zij $L \subset \mathbb{P}^3$ de lijn door $p = (1 : 0 : 0 : 0)$ en $q = (0 : 0 : 1 : 0)$. Zij $r = (1 : 2 : -1 : 5)$. Voor welk punt s op L is het snijpunt van de lijn $\overline{rs}$ met $x_0 = 0$ dezelfde als met $x_2 = 0$?

Opgave 3 (4p) Beschouw de volledige vierhoek $ABCD$ met de diagonaalpunten d_1, d_2 en d_3:

$$d_1 = \overline{AB} \cap \overline{CD},\ d_2 = \overline{AC} \cap \overline{BD} \text{ en } d_3 = \overline{AD} \cap \overline{BC}.$$

Bewijs zónder gebruik van coördinaten dat $\{d_1, E\}$ harmonisch wordt gescheiden door $\{C, D\}$.



Figuur 1: Volledige vierhoek

Opgave 4

Zij k, l en m drie verschillende kruisende lijnen in $\mathbb{P}^3$, en zij $\pi : l \to m$ de projectie van l op m met centrum k.

a) (2p) Dualiseer deze projectie. Wat gebeurt er meetkundig in de duale ruimte?

b) (4p) Bij de afbeelding $\pi : l \to m$ bestaat er dus minstens één lijn, namelijk k, z.d.d. π de projectie is met als centrum deze lijn. Zij X de verzameling van alle lijnen met deze eigenschap. De verzameling X is niet leeg, aangezien geldt $k \in X$. Welke verzameling is X? Het zou heel mooi zijn, als je X ook kan beschrijven als deelverzameling van $G(2,4) \subset \mathbb{P}^5$, ingebed met de Plücker-inbedding.

Opgave 5

Beschouw $\mathbb{P}^2$ met homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$.

a) (2p) Bepaal een vergelijking voor de kegelsnede met parametervoorstelling

$$(x_0 : x_1 : x_2) = (\lambda^2 + \mu^2 : \mu^2 - \lambda\mu : \lambda\mu) \ .$$

b) (2p) Bepaal de raaklijnen door $(1 : 1 : 1)$ aan de kegelsnede met vergelijking

$$x_0^2 + 4x_0x_2 - x_1^2 + x_2^2 = 0 \ .$$

c) (2p) Bepaal de pool van de lijn $x_0 = 0$ t.o.v. de kegelsnede

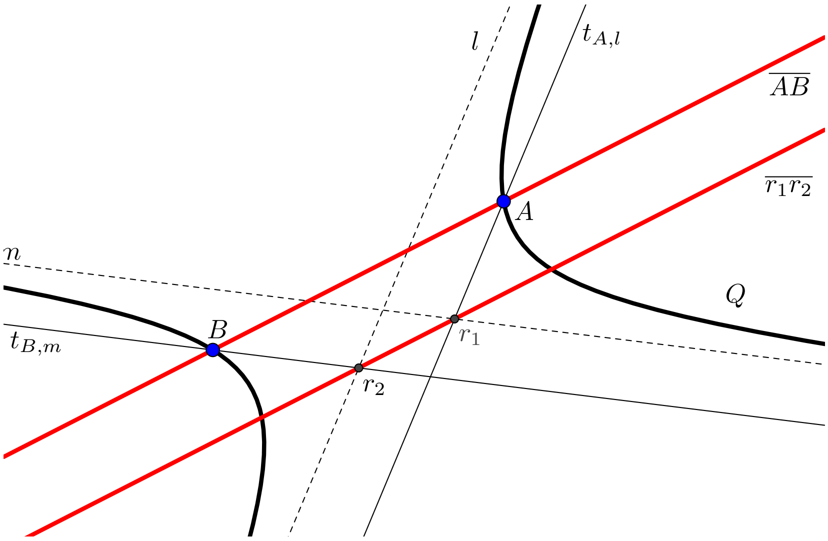
$$x_0^2 + 4x_0x_2 - x_1^2 + x_2^2 = 0 \ .$$

Opgave 6 (4p)

Zij $Q \subset \mathbb{R}^2$ een hyperbool met asymptoten l en m. Laat bovendien $A, B \in Q$ twee verschillende punten zijn. We definiëren twee lijnen $t_{A,l}$ resp. $t_{B,m}$ als de lijn door A evenwijdig aan l resp. door B evenwijdig aan m. Deze twee lijnen worden gesneden met de asymptoten als volgt:

$$r_1 := t_{A,l} \cap m \text{ en } r_2 := t_{B,m} \cap l.$$

Bewijs dat $\overline{AB}$ evenwijdig is met $\overline{r_1 r_2}$.



Figuur 2: $\overline{AB}$ is evenwijdig met $\overline{r_1 r_2}$

Opgave 7 (5p)

Beschouw de *reële* Grassmann-variëteit $G(2,4)$ ingebed in $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ via de Plücker-inbedding. Zij $W \subset \mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ een projectieve deelruimte van dimensie 3 z.d.d. $S := W \cap G(2,4)$ een niet-ontaarde niet-lege kwadriek is die geen lijnen bevat. Dat zo'n W bestaat, mag je als gegeven beschouwen. Zoals bekend corresponderen de elementen van $G(2,4)$ met de lijnen in een 3-dimensionale projectieve ruimte X. Bewijs dat de lijnen die met de elementen van S corresponderen, de ruimte X partitioneren. Dat wil zeggen dat deze lijnen in X onderling disjunct zijn en dat door ieder punt in X een lijn gaat die met een punt van S correspondeert.

Cijfer:

Zij $p \in \mathbb{Q}$ het totaal aantal behaalde punten. Voor het cijfer $c \in \mathbb{Q}$ zal gelden:

$$c \in [1 + \frac{9p}{36}, 10].$$