

Universiteit Leiden
Hertentamen Besliskunde A - Stochastische Besliskunde
13 maart 2018, 14:00-17:00

Naast een pen is bij dit tentamen toegestaan:

- een enkel vel a4-papier dat aan beide kanten ofwel met de hand beschreven is, ofwel getypt in minimaal font 9.
- een niet-programmeerbare rekenmachine.

Het aantal punten dat u voor elke deelvraag kunt verdienen staat tussen vierkante haken aangegeven. Het aantal punten dat u behaald heeft zal na deling door het totale aantal te behalen punten en vermenigvuldiging met het getal 10 uw tentamencijfer vormen.

Let op dat een a,b,c, of d onderdeel van een opgave meerdere vragen kan bevatten!!

Veel succes!

Opgave 1

Geef bij elk van de volgende uitspraken aan of deze waar is of niet waar.

- a) [1,5 pt.] Voor een irreducibel Markov proces in continue tijd op een eindige toestandsruimte bestaat de stationaire verdeling en is zij uniek.
- b) [1,5 pt.] Beschouw een irreducibel Markov proces in continue tijd, waarvoor de stationaire verdeling bestaat. Laat x een gegeven toestand zijn, en P_x de stationaire kans op x . Dan is P_x gelijk aan $1/\mu$, met μ de verwachte tijd tussen een aankomst in x van het Markov proces en de volgende aankomst in x .
- c) [1,5 pt.] Laat X_1, X_2, \dots een rij onafhankelijk en identiek verdeelde, niet-negatieve stochastische variabelen zijn, met $P\{X_n \geq 0\} > 0$. Laat $N(t)$ gelijk zijn aan het aantal vernieuwingen in $[0, t]$, $t \geq 0$, oftewel $N(t) = \sup\{n \mid \sum_{i=1}^n X_i \leq t\}$. Dan is $N(t)$ een stoptijd voor de rij X_1, \dots , voor $t \geq 0$.
- d) [1,5 pt.] Het vertrekproces in een M/M/s systeem in stationariteit is een Poisson proces.

Opgave 2

Een zzp'er verhuurt zichzelf als 'trouble-shooter' bij bedrijven. Hij is nogal succesvol, en veel bedrijven willen hem inhuren. Opdrachten komen bij de zzp'er binnen middels een Poisson proces met parameter $\lambda = 1$. Echter, op het moment dat zzp'er een opdracht heeft aangenomen, neemt hij geen nieuwe opdrachten aan tot hij weer vrij is (deze opdrachten vervallen dus voor hem). De tijdsduur die de zzp'er voor opdrachten nodig heeft, is een algemene verdeling met verdelingsfunctie F en verwachting $\tau = 2$. Ook geldt: de bedieningsduren zijn onafhankelijk van elkaar en van het aankomstproces, en tijd is in maanden gerekend. De inkomsten per bedrijfsopdracht hebben een uniforme verdeling op het interval $[4500, 7500]$.

- a) [3 pt.] Wat voor wachtrijmodel is dit? Beargumenteer dat de stationaire verdeling van het aantal opdrachten (0 of 1) dat de zzp'er heeft, dezelfde is als die van het systeem met een exponentiële bedieningsduur met parameter $1/\tau$.
- b) [3 pt.] Bereken de fractie van de tijd dat de zzp'er aan het werk is, het verwachte aantal aangenomen opdrachten per tijdseenheid, en de verwachte inkomsten per tijdseenheid.
- c) [2 pt.] Bereken de fractie van het aantal bedrijven, wier opdracht geaccepteerd wordt. Motiveer.

De zzp'er wil een schatting maken van de gederfde inkomsten per tijdseenheid, om op termijn eventueel een arbeidskracht in dienst te nemen. ('gederfde inkomsten' betekent: inkomsten die je mis bent gelopen). Een extra arbeidskracht kost hem 130% van diens bruto inkomen.

- d) [3 pt.] Bereken de totale gederfde inkomsten per maand op de lange duur. Welk brutosalaris per maand zou de zzp'er aan de arbeidskracht maximaal kunnen bieden, op grond van deze berekening?

Opgave 3 De assemblage van auto's bestaat uit de volgende onderdelen.

- 1) Maken van het chassis;
- 2) Maken van de 'bovenkant'. Dit bestaat uit de achtereenvolgende onderdelen:
 - a) monteren van zijpanelen, dak etc op een vloerplaat,
 - b) inspectie van de montage (op oneffenheden),
 - c) eventuele reparatie van kleine oneffenheden in de buitenkant, met daarna een nieuwe inspectie, etc., en
 - d) spuiten van de buitenkant.
- 3) Lassen van de bovenkant op het chassis.
- 4) Grondige eindinspectie.
- 5) Eventueel reparaties van kleine gevonden fouten, met opnieuw een grondige eindinspectie, etc.

Het maken van chassis en 'bovenkant' vindt gelijktijdig plaats. Als beide klaar zijn, wordt de 'bovenkant' op het chassis gelast, en daarna wordt een eindinspectie uitgevoerd.

- a) [1 pt.] Teken het productieproces.

De fabrikant blijkt altijd voldoende chassis op voorraad te hebben liggen, dus voor de kwantitatieve analyse van auto-assemblage hoeft de productie van chassis niet meegemodelleerd te worden.

Naast reparaties kan het product na elke inspectie worden afgekeurd. De kans dat de 'bovenkant' tijdens inspectie wordt afgekeurd is $1/10$. Met kans $2/5$ wordt een reparatie uitgevoerd, waarna er weer een inspectie plaatsvindt (dit proces kan herhaald moeten worden). De kans dat de auto na grondige eindinspectie wordt afgekeurd is $1/20$, en de kans dat vervolgens een reparatie moet worden uitgevoerd is $1/5$, waarna er weer een eindinspectie plaatsvindt (ook dit kan herhaald worden).

- b) [2 pt.] Modelleer het gereduceerde assemblageproces als een eindige Markovketen. Bepaal de klassen van de Markovketen, en of zij transiënt, nul recurrent dan wel positief recurrent zijn.
- c) [3 pt.] Bereken de kans op afkeur. Bereken de kans dat de auto eerst succesvol gelast wordt en uiteindelijk alsnog afgekeurd wordt.

Neem nu aan dat de kosten van het materiaal per auto €1500 bedragen. Verder, dat montage €750 kost, inspectie van de montage €50, reparatie van oneffenheden €100, het spuiten €250, de eindinspectie €150, en reparatie van gevonden fouten €200.

- d) [3 pt.] Bereken de verwachte kosten het productieproces (d.w.z. tot de auto klaar is dan wel het product afgekeurd).
- e) [2 pt.] Bereken de minimale prijs van een auto om geen verlies te draaien.

Opgave 4

Duivelscent Laat $n \geq 1$. We spelen het volgende spel: op tafel worden $n + 1$ identieke dozen neergezet. In de eerste n dozen wordt een som geld gestopt, zeg de bedragen x_1, \dots, x_n . In de $(n+1)$ -ste wordt de Duivelscent gestopt. Vervolgens worden de dozen gesloten en willekeurig neergezet, zodat niemand meer weet welk bedrag in welke doos zit, en waar de Duivelscent in zit. Je mag nu één voor één de dozen openen, zoveel als je wilt. Het gevonden bedrag mag je houden. Echter, als je de doos met de Duivelscent opent, ben je alles kwijt en is het spel afgelopen. Wanneer moet je stoppen met dozen openen, als het doel is je verwachte winst te maximaliseren?

- a) [3 pt.] Modelleer het probleem als een optimaal stopprobleem (d.w.z. specificeer toestandsruimte, actieruimtes, directe opbrengsten en overgangskansen). Merk op, dat je na elke geopende doos weet, welke bedragen er in de niet geopende dozen zitten en hoeveel dat er zijn, je weet alleen niet in welke doos welk bedrag zit.
- b) [3 pt.] Laat zien dat het een monotoon optimaal stopprobleem is. Specificeer de optimale stopstrategie.