$\boxed{\text{Tentamen Analyse 1W – 8 januari 2018}}$

antwoorden

$\boxed{1}$ (a) Omdat

$$3+2x-x^2 = -(x-3)(x+1),$$

is $x \mapsto 3x+2x-x^2$ een bergparabool met nulpunten 3 en -1 en dus is $3+2x-x^2>0$ voor $x \in (-1,2]$.

(b) Er geldt

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{2+\ln 3 - 2\sqrt[3]{2+h-1} - \ln 3}{h}$$

$$= \lim_{h\downarrow 0} \frac{2-2\sqrt[3]{1+h}}{h} \qquad \text{"}\tfrac{0}{0}\text{"-situatie, l'Hôpital}$$

$$= \lim_{h\downarrow 0} \frac{-\frac{2}{3}(1+h)^{-\frac{2}{3}}}{1} = -\frac{2}{3}$$

en

$$\lim_{h\uparrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\uparrow 0} \frac{\ln(3+2(2+h)-(2+h)^2) - \ln 3}{h}$$

$$= \lim_{h\uparrow 0} \frac{\ln(3+2h-4h-h^2) - \ln 3}{h}$$

$$= \lim_{h\uparrow 0} \frac{\ln(3-2h+h^2) - \ln 3}{h} \qquad \text{"}\tfrac{0}{0}\text{"-situatie, l'Hôpital}$$

$$= \lim_{h\uparrow 0} \frac{\frac{-2+2h}{3-2h+h^2}}{1} = -\frac{2}{3},$$

dus $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = -\frac{2}{3}$ bestaat,

dus f is diffbaar in 2.

(c) f is diffbaar in 2 (uit (b)), dus f is continu in 2.

(d) Enige kandidaat waar $3+2x-x^2=0$, dus $x=-1$. Omdat $\lim_{x\downarrow -1}(3+2x-x^2)=0$ is

$$\lim_{x\downarrow -1} f(x) = \lim_{x\downarrow -1} \ln(3+2x-x^2) = -\infty,$$

dus $x=-1$ is een verticale asymptoot van f.

(e) Voor $-3<x<-1$:

$$f'(x) = \frac{x^2+4-x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2} = \frac{-(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2},$$

voor $-1<x<2$:

$$f'(x) = \frac{2-2x}{3+2x-x^2},$$

voor $2<x<3$:

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}.$$

(f) Stationaire punten: $f'(x)=0$ geeft

voor $-3<x<-1$: $\cancel{x=2}$ of $\boxed{x=-2}$

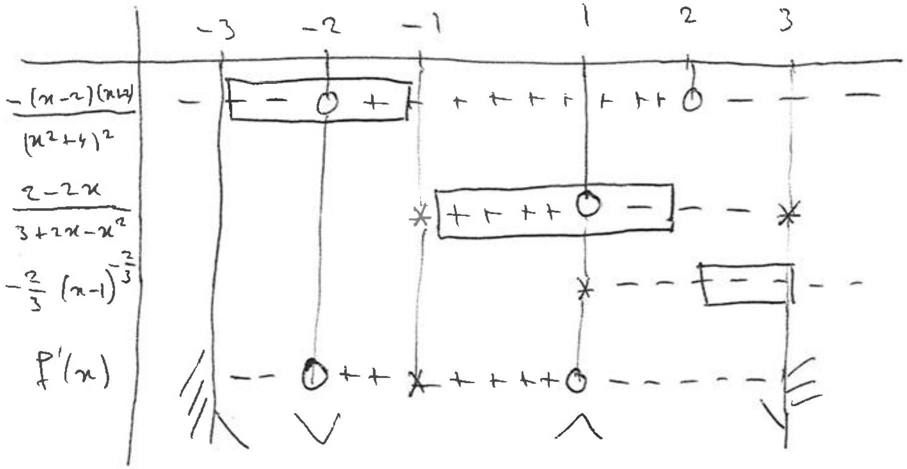
voor $-1<x<2$: $\boxed{x=1}$

voor $2<x<3$: geen.

Singuliere punten: $\boxed{x=-1}$, $x=2$ niet wegens (b).

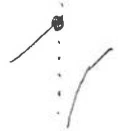
Randpunten: $\boxed{x=-3}$ en $\boxed{x=3}$.

Tekenschema f':



Bij $x=-3$: randmax, $f(-3) = \frac{-3}{13}$

$x = -2$: min, $f(-2) = -\frac{1}{4}$

$x=-1$:  (zie (d)) max, $f(-1) = -\frac{1}{5}$

$x=1$: max, $f(1) = \ln(4)$

$x=3$: randmin, $f(3) = 2+\ln(3) - 2\sqrt[3]{2}$.

Door (d) zijn alle minima alleen lokaal.

Het max bij $x=1$ is globaal.

$\boxed{2}$ In de buurt van de gezochte punten geldt $y=f(x)$, dus

$$(x-2f(x))^3 - 3x + f(x) = 0.$$

Impliciet differentiëren geeft

$$3(x-2f(x))^2\cdot(1-2f'(x)) - 3 + f'(x) = 0.$$

Voor een horizontale raaklijn willen we $f'(x)=0$:

$3(x-2f(x))^2 - 3 = 0$ oftewel, met $y=f(x)$,

$3(x-2y)^2=3$, $x-2y=\pm 1$, $x=2y\pm 1$.

Het punt (x,y) moet ook voldoen aan

$$(x-2y)^3 - 3x + y = 0,$$

dus met $x=2y+1$ vinden we:

$$1^3 - 3(2y+1) + y = 0$$

dus $-5y=2$, dus $y=-\frac{2}{5}$ en $x = -\frac{4}{5}+1 = +\frac{1}{5}$,

dus $(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$.

Met $x=2y-1$: $(-1)^3 - 3(2y-1) + y = 0$, dus

$-5y=-2$, dus $y=\frac{2}{5}$ en $x=\frac{4}{5}-1=-\frac{1}{5}$,

dus $(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$.

De gevraagde punten zijn $(\frac{1}{5},-\frac{2}{5})$ en $(-\frac{1}{5},\frac{2}{5})$.

$\boxed{3}$ (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \sin(\frac{1}{n})\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$ en

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent, dus volgt met het vergelijkingscriterium dat $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$ divergent is.

Verder geldt

- $\sin(\frac{1}{n}) \geq 0$ voor $n \geq 1$
- $n \mapsto \frac{1}{n}$ is dalend en tussen 0 en $\frac{\pi}{2}$, dus $n \mapsto \sin(\frac{1}{n})$ is dalend
- $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{n}) = 0$,

dus met de alternating series test van Leibniz volgt dat $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$ convergent is. Deze reeks is dus voorwaardelijk convergent.

(b) Er geldt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{4n^4+(-1)^n \ln n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{4n^4+(-1)^n \ln n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4+\frac{(-1)^n \ln n}{n^4}} = \frac{1}{4+0} = \frac{1}{4},$$

want $-\frac{\ln n}{n^4} \leq \frac{(-1)^n \ln n}{n^4} \leq \frac{\ln n}{n^4}$ en $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^4} = 0$ (polynoom "wint" van $\ln$), dus de insluitstelling geeft $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^4} = 0$. Uit het vergelijkingscriterium en het feit dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergent is volgt dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^4+(-1)^n \ln n}$ (absoluut) convergent is.

(c) Omdat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!\,3^{n+1}}{(3n+3)!}}{\frac{n!\,3^n}{(3n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,3^{n+1}(3n)!}{n!\,3^n\,(3n+3)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})\,3}{(3+\frac{3}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{1}{n})}$$

$$= 0$$

volgt uit de ratio test / quotiëntencriterium van Cauchy dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,3^n}{(3n)!}$ (absoluut) convergent is.

(d) Omdat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{\frac{1}{n}} = \quad \text{"}\tfrac{0}{0}\text{"-situatie, l'Hopital}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = 1$$

en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent, volgt uit het vergelijkingscriterium dat $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\pi}{2} - \arctan(n))$ divergent is.

$\boxed{4}$ (a) Er geldt

$$\int \sin x \cos x (\tan x - 1)\,dx = \int (\sin^2 x - \sin x \cos x)\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C.$$

(b) Breuksplitsen:

$$\frac{3x^2+8x+5}{x^3+2x^2+5x} = \frac{3x^2+8x+5}{x(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5},$$

tellers vergelijken:

$$A(x^2+2x+5) + Bx^2 + Cx = 3x^2+8x+5,$$

$$(A+B)x^2 + (2A+C)x + 5A = 3x^2+8x+5,$$

dus $\begin{cases} 5A = 5 \\ 2A+C = 8 \\ A+B = 3 \end{cases}$ dus $A=1,\ C=6,\ B=2.$

Dus

$$\int \frac{3x^2+8x+5}{x^3+2x^2+5x}\,dx = \int \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x} + \frac{2x+6}{x^2+2x+5}\,dx = \ln|x| + \int \frac{2x+6}{(x+1)^2+4}\,dx$$

$$= \ln|x| + \int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+4} + \frac{4}{(x+1)^2+4}\,dx$$

$$= \ln|x| + \ln\left((x+1)^2+4\right) + \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \ln|x| + \ln(x^2+2x+5) + 2\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

(c) Met substitutie,

$$\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x^2-x^2\ln^2 x}}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$$

$$= \int_{\ln 1}^{\ln e} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \Big[\arcsin u\Big]_0^1 = \arcsin(1) - \arcsin(0)$$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{5}$ Met $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, $x \geq 0$ vinden we

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f''(x) = e^{\sqrt{x}}\frac{1}{4x} + e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{-1}{4x\sqrt{x}}.$$

Dus $f(1) = e$ en $f'(1) = \frac{e}{2}$. Het eerstegraads Taylorpolynoom is ~~dus~~ $f(1) + f'(1)(x-1)$, dus

$$e + \frac{e}{2}(x-1).$$

Er geldt volgens de stelling van Taylor dat

$$f(x) = e + \frac{e}{2}(x-1) + \frac{1}{2}f''(s)(x-1)^2$$

voor een s tussen 1 en x.

Voor $x \in [1,4]$ is dan $s \in [1,4]$ en dan

$$f''(s) = e^{\sqrt{s}}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s\sqrt{s}}\right) \geq 0$$

Omdat $s\sqrt{s} \geq s$ voor $s \geq 1$ en dus $\frac{1}{s\sqrt{s}} \leq \frac{1}{s}$.

Ook geldt voor $s \in [1,4]$ dat

$$f''(s) = e^{\sqrt{s}}\frac{1}{4}\frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{s}}\right) \leq e^{\sqrt{s}}\frac{1}{4}\frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4}}\right)$$

$$= e^{\sqrt{s}}\frac{1}{8}\frac{1}{s} \leq e^{\sqrt{s}}\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1} \leq e^{\sqrt{4}}\frac{1}{8} = \frac{e^2}{8}.$$

Dus

$$0 \leq \frac{1}{2}f''(s)(x-1)^2 \leq e^{\sqrt{x}} - e - \frac{e}{2}(x-1)$$

$$\leq \frac{1}{2}f''(s)(x-1)^2 \leq \frac{e^2}{16}(x-1)^2.$$

$\boxed{6}$ Er geldt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{met convergentiestraal } \infty,$$

dus

$$e^{t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^{2n} \quad \text{met conv str. } \infty$$

en dus

$$g(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{met conv str. } \infty.$$

De eerste termen geven het zevendegraads Taylorpolynoom van g rond $a=0$:

$$\frac{1}{0!}\frac{x}{1} + \frac{1}{1!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7}$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{42}x^7.$$