Universiteit
Leiden
Wiskunde en Natuurwetenschappen

Vak: INLEIDING STATISTIEK
Naam:
Datum: 22-12-2016
Studierichting:
Docent:
Collegekaartnummer:

1a Los op: $\bar{X} = \frac{2}{2-\theta} \Rightarrow \hat{\theta} = 2 - \frac{2}{\bar{X}}$.

1b Log likelihood $\theta \mapsto \log(\prod_i 4 2^{-X_i}) + \sum(X_i-1)\log\theta + \sum(2-X_i)\log(1-\theta) - n\log(2-\theta)$

Stationair punt afgeleide:

$$\frac{\sum(X_i-1)}{\theta} - \frac{\sum(2-X_i)}{1-\theta} + \frac{n}{2-\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\bar{X}-1)(1-\theta)(2-\theta) - (2-\bar{X})\theta(2-\theta) + \theta(1-\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta^2(0) + \theta(-\bar{X}) + 2\bar{X} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta} = 2 - 2/\bar{X}.$$

Als $1 < \bar{X} < 2$, dan is het tekenverloop van de afgeleide: $\underset{0}{|} \; + \; \underset{\hat{\theta}}{0} \; - \; \underset{1}{|}$

Dus is $\hat{\theta}$ inderdaad een punt van maximum

Als $\bar{X}=1$ of $\bar{X}=2$, dan is $\hat{\theta}$ een randmaximum.

1c $i_\theta = \mathrm{Var}_\theta\left(\frac{X_1-1}{\theta} - \frac{2-X_1}{1-\theta} + \frac{1}{2-\theta}\right) = \mathrm{Var}_\theta\left(X_1\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta}\right)\right) = \frac{2\theta(1-\theta)}{(2-\theta)^2\theta^2(1-\theta)^2} = \frac{2}{(2-\theta)^2\theta(1-\theta)}$.

Fisher informatie in $X$ is: $n i_\theta$.

1d $\hat{\theta}_{MLE} \pm \frac{1.96}{\sqrt{n i_{\hat{\theta}_{MLE}}}}$.

2a $\chi^2_{2n}$, want een som van onafhankelijke chikwadraat variabelen is chikwadraat verdeeld met de som van het aantal vrijheidsgraden.

2b $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_{\theta_1}(X_i)}{p_{\theta_0}(X_i)} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n e^{-(\theta_1-\theta_0)\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$

Voor $\theta_0=1$ en $\theta_1=2$, is dit een dalende functie van $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Volgens het Lemma van Neyman en Pearson verwerpt de meest onderscheidende toets als $\sum X_i^2 < d$, voor $d$ bepaald door $P_{\theta_0}(\sum X_i^2 < d) = 0.05$. Omdat $2\sum X_i^2 \overset{D}{=} \chi^2_{2n} = \chi^2_{20}$ onder $\theta_0=1$, geldt $2d = 10.9$ (tabel). Dus $d = 5.45$

2c De toets uit b. is UMP voor $H_0: \theta=1$ tegen $H_1: \theta>1$, want voor iedere $\theta_1>1$ vinden we in b. dezelfde toets voor $H: \theta=\theta$.
Er geldt $P_\theta(\sum X_i^2 < 5.45) = P_\theta(2\theta \sum X_i^2 < 10.9\,\theta) = P(U < \theta\, 10.9)$ voor $U \overset{D}{=} \chi^2_{20}$. Dit is een stijgende functie van $\theta$, zodat

de toets uit b onbetrouwbaarheid 5% bezit voor $H_0: \theta \le 1$.
(want $\sup_{\theta \le 1} P_\theta(\Sigma X_i^2 < d) = P_1(\Sigma X_i^2 < d) = 0.05$). Dus de toets is UMP.

2d $P_\theta(9.6 < 2\theta \Sigma X_i^2 < 34.2) = 0.95$ (tabel) $\Longrightarrow$
$[9.6/2\Sigma X_i^2 , 34.2/2\Sigma X_i^2]$ is een exact betrouwbaarheidsinterval met betrouwbaarheid 95%.

3a $\prod_{i=1}^{n} f_{\alpha,\beta}(x_i) = C(\alpha,\beta)^n (\prod x_i)^{\alpha-1} (\prod(1-x_i))^{\beta}$
voldoende vector $(\prod X_i , \prod(1-X_i))$ of equivalent $(\Sigma \log X_i ; \Sigma \log(X_i)$

3b De vector uit a is volledig, want exponentiele familie met
$Q_1(\alpha,\beta) = \alpha$ , $Q_2(\alpha,\beta) = \beta$ en $\{(Q_1(\alpha,\beta), Q_2(\alpha,\beta)) : \alpha > 0, \beta > 0\}$
bevat inwendig punt.

3c Een UMVZ schatter $T$ is een zuivere schatter $(E_{\alpha,\beta} T = g(\alpha,\beta), \forall \alpha,\beta)$
met $MSE((\alpha,\beta);T)$ kleiner gelijk aan $MSE((\alpha,\beta),T_1)$ voor alle
andere zuivere schatter van $g(\alpha,\beta)$ en alle $(\alpha,\beta)$.

3d $\frac{1}{n} \Sigma \log(X_i/(1-X_i)) = \frac{1}{n} \Sigma \log X_i - \frac{1}{n} \Sigma \log(1-X_i)$. Deze is zuiver
en een functie van de voldoende, volledig vector,

4a $E_\theta X = \int_\theta^\infty x \frac{3\theta^3}{x^4} dx = \frac{3}{2}\theta \Rightarrow E_\theta(\frac{2}{3}X) = \theta , \forall \theta$.

b $MSE(\theta, \frac{2X}{3}) = \frac{4}{3} var_\theta X_1 = \frac{4}{9}[\int_\theta^\infty x^2 \frac{3\theta^3}{x^4} dx - (\frac{3}{2}\theta)^2] = \theta^2/3$.

c $\pi(\theta|X) \propto p_\theta(x)\pi(\theta) = \frac{3\theta^3}{x^4} 1_{\theta \le x} \cdot \frac{2}{\theta^3} 1_{\theta \ge 1} \propto 1_{1 \le \theta \le x}$.

d $\frac{X+1}{2}$, de verwachting van de hom$[1, X]$-verdeling.

e $E_\theta \frac{X-1}{2} = \frac{3}{4}\theta - \frac{1}{2}$.
$MSE(\theta, \frac{X+1}{2}) = var_\theta \frac{X+1}{2} + (E_\theta X_1 - \theta)^2 = \frac{1}{4}\frac{9}{4}\frac{\theta^2}{3} + (\frac{1}{4}\theta + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\theta^2 + \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}$.

Voor $\theta = 1$ : $MSE(1, \frac{2X}{3}) = \frac{1}{3} \not> \frac{3}{4} = MSE(1, \frac{X+1}{2})$ $\Longrightarrow \frac{X+1}{2}$ verdient voorkeur
$\theta = 10$; " $= \frac{100}{3} > 22.75 = ..$ $\Longrightarrow \frac{X+1}{2}$ " ".